



Etude du traitement de données gravimétriques acquises lors de levés aériens

Madjid Abbasi

► To cite this version:

Madjid Abbasi. Etude du traitement de données gravimétriques acquises lors de levés aériens. Autre. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2006. Français. NNT : . tel-00097243

HAL Id: tel-00097243

<https://theses.hal.science/tel-00097243>

Submitted on 21 Sep 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ TOULOUSE III - PAUL SABATIER
U.F.R. Sciences et Vie de la Terre

THÈSE
pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ TOULOUSE III
Discipline : Géodésie
présentée et soutenue par

Madjid ABBASI

le 10 juillet 2006,

**Etude du traitement de données gravimétriques
acquises lors de levés aériens**

sous la direction de :

Jean-Pierre Barriot (CNES, Toulouse)

devant le jury composé de :

M. Bouchez Jean-Luc	Université de Toulouse III	Président
M. Bayer Roger	Université de Montpellier II	Rapporteur
M. Diamant Michel	IPGP, Paris	Rapporteur
M. Forsberg Rene	Danish Space Center, Denmark	Rapporteur
M. Barriot Jean-Pierre	CNES, Toulouse	Directeur
M. Kasser Michel	ENSG, Paris	Examineur
M. Sobouti Yousef	IASBS, Zanzan, Iran	Invité
M. Verdun Jérôme	ENSG, Paris	Invité

Laboratoire de Dynamique Terrestre et Planétaire, UMR 5562,
Observatoire Midi-Pyrénées, 14, avenue E. Belin, 31400 TOULOUSE

.

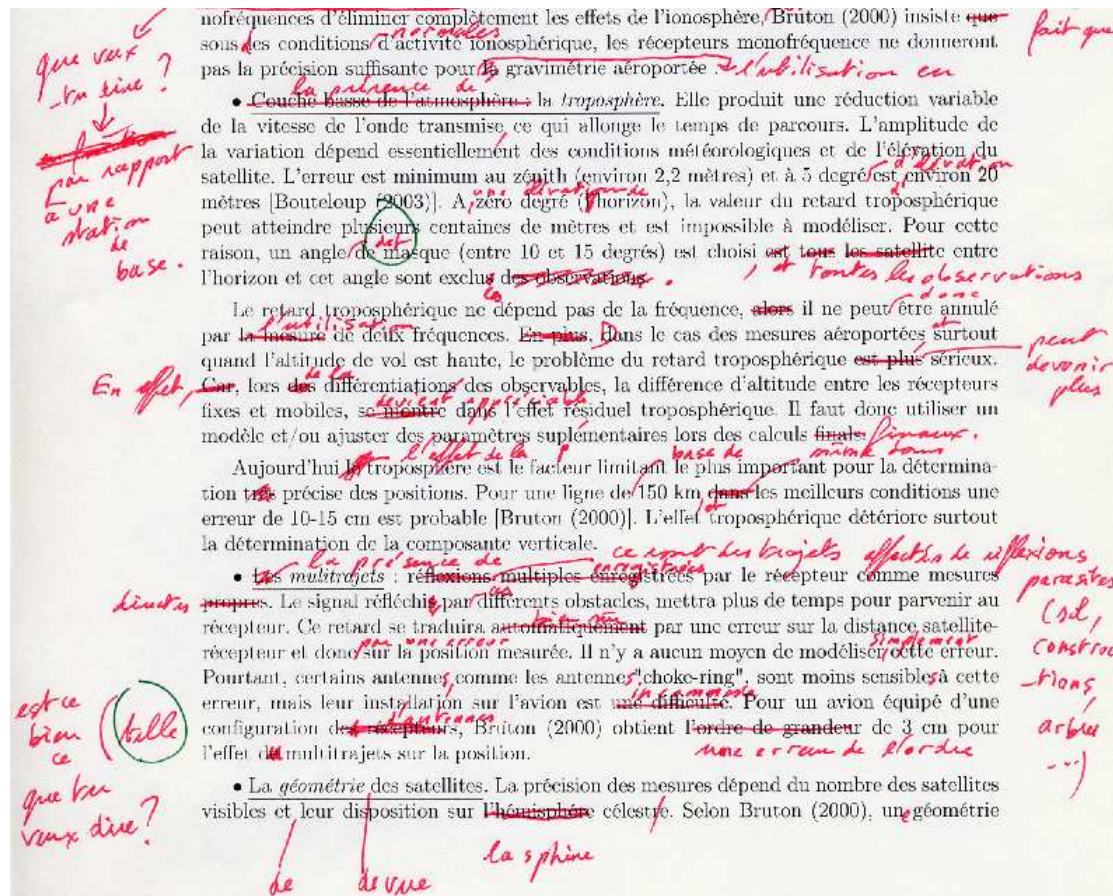
A ma mère et mon père pour leur amour divin,
à mon épouse Maryam pour sa sagesse et son sacrifice exemplaire
et à mes enfants Denise et Alireza pour l'immense bonheur qu'ils m'ont offert

Remerciements

Cette thèse a été financée par le ministère de la science, de la recherche et de la technologie iranien. Elle s'est déroulée au sein l'Observatoire Midi-Pyrénées (OMP) au Bureau Gravimétrique International (BGI). Mes participations aux congrès nationaux et internationaux ont été financés par l'Institut National des Sciences de l'Univers (INSU).

Ma venue en France étant ma première expérience de séjour à l'étranger fut pour moi une période brillante de ma vie grâce à toutes les personnes qui m'ont entouré pendant ces quatre années. Je souhaite remercier tout ceux qui ont contribué, qui m'ont encouragé et qui m'ont aidé à la réalisation de cette thèse et de cette expérience.

Toute ma reconnaissance va à mon directeur de thèse, Mr Jean-Pierre Barriot, pour m'avoir proposé cette thèse et pour m'avoir accueilli au BGI. La disponibilité de Mr Barriot et ses compétences scientifiques m'ont permis de mener à bien cette thèse. Il m'a soutenu dans mes projets tout en me laissant beaucoup de liberté au cours de ces 4 années, ce qui était très constructif. Considérant mes connaissances limitées de la langue française, Mr Barriot fut toujours patient pendant nos discussions. Il a consacré beaucoup de temps à corriger les innombrables fautes d'orthographe de cette thèse (voir l'exemple ci-dessous).



Je voudrais remercier mes rapporteurs Roger Bayer, Rene Forsberg et Michel Diamant d'avoir rapporté ma thèse, et Michel Kasser et Jean Luc-Bouchez pour avoir accepté d'être membres du jury. Je voudrais également remercier le Professeur Yousef Sobouti, venu de ma ville natale Zanzan en Iran, pour y participer comme membre invité.

Tous mes remerciements aussi à Jérôme Verdun pour son encouragement permanent et ses commentaires constructifs, et sa participation à ma soutenance comme membre invité. Je n'oublie pas non plus Henri Duquenne de l'Ecole Nationale des Sciences Géographiques à Paris avec lequel nous avons eu des collaborations constructives.

Un immense merci à tous les membres du laboratoire de Dynamique Terrestre et Planétaire de l'OMP qui m'ont conseillé, corrigé, et bien plus encore, durant ces quatre années de recherche, notamment mes collègues de bureau Marie, Sophie et Stavros. Surtout Marie qui m'a toujours aidé quand j'avais des difficultés administratives ou linguistiques. Je voudrais également remercier Mmes Nicole Lestieu, Sophie Pecquerie, Nathalie Dalla-Riva, Muriel Barriot et Cecile Camino qui ont facilité ces démarches administratives avec beaucoup d'efficacité. Sans oublier Félix Pérosanz, Michel Sarailh et Georges Balmino pour leurs aides techniques sur les points scientifiques.

Mes profonds remerciements vont aussi à Sébastien Petitjean et à sa famille. Dès le premier jour de mon arrivée à l'OMP il est devenu un ami proche. J'ai passé des moments formidables en famille avec Sébastien. Je voudrais également remercier David Baratoux, Celine Dantas, Yves Daydou et Marie Python pour avoir partagé leur temps avec moi durant ces années.

En dehors du labo, je tiens à remercier très vivement Jamal Asgari, mon ami, qui est toujours présent à mes côtés depuis mon entrée à l'université il y a 15 ans. Une amitié qui est inestimable pour moi.

Finalement, ce travail de thèse doit beaucoup à mon père, ma mère, mes frères et mes soeurs qui m'ont encouragé et soutenu depuis toujours depuis la lointaine Iran. Je leur adresse un immense merci. Merci infiniment aussi à tous les membres de ma belle famille surtout ma belle-mère et mon beau-père.

Enfin, je tiens à exprimer mes profonds sentiments à mon épouse Maryam pour son soutien et son dévouement inconditionnels. Je n'aurais jamais terminé cette thèse sans elle.

Table des matières

1	Introduction	11
1.1	La gravimétrie aéroportée	11
1.2	Les différents systèmes d'acquisition en gravimétrie aéroportée	12
1.3	Définition du problème	14
1.4	Organisation du manuscrit	17
2	Instrumentation et systèmes de mesure en gravimétrie aéroportée	19
2.1	Le système GPS utilisé en gravimétrie aéroportée	20
2.1.1	Mesures GPS	21
2.1.2	Observables différenciées	24
2.1.3	Combinaison linéaire de mesures	25
2.1.4	Traitement des données	27
2.2	Le Système de Navigation Inertielle (INS)	29
2.2.1	Les types d'accéléromètres	29
2.2.2	Les type de gyroscopes	30
2.2.3	Les types d'INS	32
2.3	Le gravimètre stabilisé de LaCoste & Romberg	33
2.3.1	Capteur du gravimètre LaCoste & Romberg	34
2.3.2	La Plate-forme stabilisée	38
2.3.3	Correction sur la gravité mesurée due à l'imperfection du nivellement	44
3	Modèle mathématique du fonctionnement du gravimètre	49
3.1	Référentiels utilisés en gravimétrie mobile	49

3.2	Vitesse et accélération dans le repère de mesure	54
3.2.1	Relation pour les vitesses	54
3.2.2	Relation pour les accélérations	55
3.3	Equation du capteur gravimétrique LaCoste & Romberg	57
3.3.1	Application de la deuxième loi de Newton	57
3.3.2	Equation différentielle du mouvement du fléau	59
3.3.3	Equation simplifiée du mouvement du fléau	62
3.3.4	Accélérations parasites dues aux mouvements de l'avion	62
4	Modélisation de la gravité à partir de mesures aérogravimétriques	65
4.1	Pré-traitement des données aérogravimétriques	66
4.1.1	Vérification pour des lacunes et des erreurs grossières	66
4.1.2	Synchronisation des mesures	67
4.1.3	Analyse spectrale	68
4.2	Filtrage direct des données aérogravimétriques	73
4.3	Notre nouvelle approche : l'équation intégrale du gravimètre	76
4.3.1	De l'équation différentielle à l'équation intégrale	76
4.3.2	Résoudre l'équation intégrale du gravimètre	80
4.4	Matrices nécessaires à la solution au sens des moindres carrés	86
4.4.1	Matrice de covariance a priori des inconnues	86
4.4.2	Vecteur d'entrée de l'équation intégrale et matrice de covariance associée	91
4.5	Ajustement des valeurs de la gravité aux points de croisement	105
5	Le levé aérogravimétrique sur les Alpes Occidentales	109
5.1	Situation géographique du levé	109
5.2	L'avion	110
5.3	Trajectographie de l'avion	113
5.3.1	Positionnement de l'avion par GPS	113
5.3.2	La centrale inertielle de navigation	115
6	Résultats numériques et validations associées	117
6.1	Pré-traitement	117
6.1.1	Histogrammes des paramètres	117
6.1.2	Elimination des lignes de vol incohérentes	118

6.2	Perturbations de gravité calculées par utilisation de l'équation simplifiée du gravimètre	125
6.3	Perturbation de gravité calculée avec l'équation différentielle complète du gravimètre	128
6.4	Perturbation de gravité selon l'équation intégrale du gravimètre	132
6.4.1	Résultats d'application des équations de contrainte aux points de croisement	134
6.5	Validation des cartes de la perturbation de gravité calculée à l'altitude de vol	143
7	Conclusion et perspectives	157
A	Vitesse et accélération dans le cas de changement de repère	161
B	Développement des termes de l'Equation (3.13) : le gravimètre dans le repère de Copernic	165
C	Expressions de l'accélération verticale et l'accélération Eötvös exercées sur l'avion	173
D	Le méthode d'Helmert pour l'estimation des facteurs de variance	179
E	La différentiation de séries chronologiques et l'estimation des matrices de covariance associées	181
F	Equations des contraintes aux points de croisements	191
F.1	Methode A : Interpolation linéaire	191
F.2	Methode B : Interpolation quadratique	192

INTRODUCTION

1.1 La gravimétrie aéroportée

Nerem et al. (1995) donnent une vision globale des différentes techniques de mesure du champ de gravité de la Terre (résumées dans le Tableau 1.1). Si nous classifions les techniques de gravimétrie en trois catégories (spatiale, aéroportée et terrestre), les avancées les plus évidentes sur la dernière dizaine d'années sont dans le secteur spatial (missions CHAMP, JASON-1, GRACE et GOCE). Ces satellites mesurent le champ de gravité terrestre à basse altitude (cf. Tableau 1.2) ce qui permet une modélisation globale jusqu'au degré et ordre 150 en développement en harmoniques sphériques avec des mesures purement satellitaires [Reigber et al. (2005)]. Le degré 150 correspond à une longueur d'onde de 150 Km à l'équateur. Par ailleurs, à partir des mesures ponctuelles sur la surface de la Terre, nous pouvons modéliser des longueurs d'ondes inférieures à environ 10 Km. Donc, malgré l'amélioration des mesures satellitaires, il reste encore une large lacune dans la bande de fréquence entre des longueurs d'ondes de 10 Km à 150 Km, au moins sur les continents. En ce moment, la seule méthode qui couvre cette bande de fréquence est la gravimétrie aéroportée. Ainsi, en combinant les trois méthodes de mesure (satellitaire, aéroportée et terrestre), nous sommes capable de modéliser le champ de gravité terrestre sur tout son contenu fréquentiel.

Il faut ajouter que sur les océans, grâce à l'altimétrie satellitaire, les données sont disponibles avec une résolution de 5 à 30 Km (cf. Tableau 1.1). Pour les résolutions plus fines la méthode de gravimétrie marine est utilisable, son principe étant identique à celui de la gravimétrie aéroportée.

Les mesures terrestres ne couvrent pas la surface totale de la planète, il reste encore beaucoup de lacunes de la couverture gravimétrique. Ces régions ne sont pas facilement accessibles et sont quasiment vierges de toute mesure gravimétrique ; par exemple les chaînes de montagnes, les régions au rude climat (déserts, régions polaires), les forêts vierges et les régions dangereuses (régions volcaniques actives). Malgré sa précision moyenne, la gravimétrie aéroportée permet d'avoir des données sur toutes ces régions.

De plus, la rapidité des levés aéroportés est un avantage. Il faut également mentionner que par rapport à la taille de la région couverte par projet, le coût d'un levé gravimétrique aéroporté est relativement intéressant.

1.2 Les différents systèmes d'acquisition en gravimétrie aéroportée

Les recherches en gravimétrie aéroportée ont débuté à la fin des années 1950 [Torge (1989)], mais n'ont pas eu un grand succès à cause de la précision insuffisante des systèmes de navigation (pour obtenir les vitesses et accélérations de l'avion). L'amélioration des systèmes de gravimétrie et l'utilisation des radars altimétriques pour la détermination de l'accélération verticale étaient au cœur des recherches sur la gravimétrie aéroportée au milieu des années 1980 [Schwarz et Wei (1994)]. Mais ce n'est qu'à partir de la fin des années 1980 que le système GPS a permis un positionnement suffisamment précis pour déterminer les accélérations parasites de l'avion. Car les problèmes principaux de la gravimétrie mobile sont :

1. fixer une direction dans l'espace pendant le mouvement,
2. séparer les accélérations cinématiques de la gravité.

Pour le premier problème il existe deux méthodes opérationnelles principales [Wei et Schwarz (1998)]

- la stabilisation mécanique de l'appareil de mesure par rapport à la verticale du lieu (direction de la pesanteur) en utilisant une plate-forme stabilisée
- l'utilisation de systèmes à axes liés¹, rigidement fixés à la structure du véhicule. La transformation des mesures le long de la direction de la verticale du lieu est faite par calculs.

Les accélérations cinématiques de l'avion sont calculées à partir des mesures GPS. Selon le choix du système gravimétrique, il existe aujourd'hui trois systèmes principaux de gravimétrie mobile :

1. le système INS² à axes liés (stabilisé)³ qui est capable de faire les deux types de mesure de gravimétrie scalaire et vectorielle⁴ [Kwon (2000)]. On l'appelle système de gravimétrie GPS/INS ou également système de gravimétrie inertielle [Verdun (2000)].

¹dite "strapdown systems"

²Inertial Navigation System

³strapdown INS

⁴La gravimétrie scalaire modélise la magnitude du vecteur de gravité tandis que la gravimétrie vectorielle détermine de plus sa direction.

TAB. 1.1 – Comparaison entre les différentes techniques de détermination du champ de gravité de la Terre. D'après Nerem et al. (1995) avec mise à jour d'après Reigber et al. (2005).

Capteur	Exactitude ^a	Résolution	Application	Remarques
Gravimétrie statique				
Gravimètre relatif	$1 - 2 \times 10^{-2}$ mGal	VP ^b	G&G ^c	limité aux régions accessibles
Gravimètre absolu	$1 - 2 \times 10^{-3}$ mGal	VP	G&G ; mouvements verticaux ; variations temporelles	sensible aux bruits
Accéléromètre cryogénique	10^{-2} mGal	VP	variations temporelles à longues périodes	sensible aux bruits
Gravimétrie dynamique				
Gravimètre scalaire aéroporté	$2 - 4$ mGal	10-20 km	G&G ; prospection pétrolière	nécessite l'amortissement du capteur
Gradiomètre aéroporté	$5 - 10 \times 10^{-9}s^{-2}$	1-10 km	G&G	pas encore opérationnelle
Gravimètre scalaire marin	$0.2 - 0.4$ mGal	<1 km	géophysique ; prospection pétrolière	coûteux
Gradiomètre marin	$1 - 10 \times 10^{-9}s^{-2}$	<1 km	système de navigation	utilisé par la marine américaine
Système inertiels terrestres	$1 - 4$ mGal	<1 km	G&G	problème de dérive gyroscopique
Méthodes satellitaires				
Poursuite terrestre	$0.3 - 0.5$ m	500 km	G&G ; variations temporelles ; calcul d'orbite	Résolution limitée par l'altitude ; Erreurs dues aux forces non conservatives
Poursuite inter-satellites	$1 - 4$ mGal(est.)	100-200 km	G&G ; gravité moyenne	Erreurs dues aux forces non conservatives
Poursuite inter-satellites	$1 - 4$ mGal(est.)	1000 km	variations temporelles	Tapley et al. (2004)
Gradiométrie satellitaire	$1 - 2$ mGal(est.)	100 km	G&G ; variations temporelles	non-opérationnelle (projet GOCE ; cf. Tableau 1.2)
Altimétrie satellitaire	<0.15 m	5-30 km	G&G ; océanographie	exactitude du Géoïde limitée par le modèle de topographie dynamique

^aLes chiffres présentés en *mGal* sont pour l'accélération gravitationnelle, en s^{-2} pour son gradient et en *m* pour la hauteur du Géoïde.

^bValeur Ponctuelle

^cG&G : Applications classiques en Géodésie et la Géophysique.

TAB. 1.2 – Missions spatiales récentes, comportant des mesures du champ de pesanteur terrestre. CHAMP : CHALLENGING Minisatellite Payload for geoscience and applications. GRACE : Gravity Recovery and Climate Experiment. GOCE : Gravity field and steady state Ocean Circulation Explorer. D'après (<http://www.esa.int/livingplanet>), Verdun (2000) et Reigber et al. (2005)

Mission	Technique	Altitude moyenne (Km)	Date de lancement	Mission prévue jusqu'à
CHAMP	Accélérométrie	470 à 350	Juillet 2000	2009
JASON-1	Altimétrie, poursuite terrestre (Doris) et inter-satellites (GPS)	1336	Decembre 2001	2008
GRACE	poursuite inter-satellites (2 satellites co-orbitant + GPS)	480 à < 400	Mars 2002	2010
GOCE	poursuite inter-satellites (GPS) et gradiométrie	250-270	prévu mi 2006	2009

2. un gravimètre à peson associé à une plate-forme stabilisée (système de gravimétrie scalaire)
3. un système d'accéléromètre(s) avec GPS multi-antenne. Ce système permet de déterminer l'attitude du véhicule à chaque instant par les changements des coordonnées des antennes GPS par rapport à la constellation des satellites GPS.

Les deux premiers systèmes sont utilisés fréquemment [LaCoste (1967)], [Brozena (1992)], [Glennie et al. (2000)] et [Schwarz et al. (2002)]. Le troisième système a encore une faible précision et les recherches pour son amélioration continuent. Le grand avantage de ce dernier système est son coût très bas par rapport à deux autres [Boedecker et al. (1994)], [Melachroinos (2004)] et [Verdun et Klingelé (2005)]. Le Tableau 1.3 donne une liste des principaux groupes de recherche actifs dans le domaine de la gravimétrie aéroportée .

1.3 Définition du problème

Quelque soit la méthode utilisée pour faire des mesures, le problème principal en gravimétrie aéroportée est la séparation des accélérations cinématiques de la gravité. Ces accélérations sont dues aux mouvements de l'avion et ont une signature plutôt dans la partie haute du spectre des fréquences. La majeure partie de l'énergie du signal de gravité mesurable depuis l'avion est située dans la partie basse du spectre. Ceci indique que l'on peut en principe appliquer un filtre passe-bas sur les mesures pour isoler le signal gravimétrique. Les différents aspects du filtrage ont été étudiés et présentés dans une abondante littérature, par exemple Childers et al. (1999), Bruton (2000), Verdun (2000) et Olesen (2002).

Cependant, le filtrage direct des données pose quelques problèmes dont les plus importants sont :

TAB. 1.3 – Principales équipes de recherches en gravimétrie aéroportée

Pays	Institution	Système	Bibliographie
Allemagne	BAW ^a	3 accéléromètres + 4 GPS	Boedecker et al, 1994
Allemagne	Iff ^b	Gravimètre	Abdelmoula 2001
Allemagne	GFZ ^c	Gravimètre	Marchenko, et al, (2002)
Canada	Université de Calgary	INS stabilisé	Bruton, 2000
Danemark	KMS ^d	gravimètre + INS stabilisé	Olesen et al, 2002
France	LAREG ^e + ESGT ^f	3 accéléromètres + 4 GPS	Melachroinos, 2004
Russie	LIGS ^g	INS stabilisé	Salychev, 2003
Suisse	ETH Zürich ^h	gravimètre + INS stabilisé	Verdun, 2000
USA	Naval Research Lab.	gravimètre + INS stabilisé	Brozena, 1992

^aAcadémie des Science de Bavière^bInstitut für Flugführung (Institute of Flight Guidance), Technical University of Braunscheig^cGeoForschungsZentrum Potsdam^dService du Cadastre^eLaboratoire de Recherche en Géodesie^fEcole Supérieure des Géomètres et Topographes^gLaboratory of Inertial Navigation Systems^hEcole Polytechnique Fédérale de Zürich

- le choix du filtre et de sa fréquence de coupure. Certaines références, comme Childers et al. (1999), préfèrent ainsi choisir la fréquence de coupure à partir de la modélisation du champ de gravité en faisant des hypothèses ad hoc sur la taille, la profondeur et la densité des sources de l'anomalie. Ces hypothèses, nécessitent une connaissance à priori assez détaillée de la structure géologique de la région, ce qui n'est pas toujours le cas. Par ailleurs, Bruton (2000) et Bayoud (2001) choisissent la fréquence de filtrage ainsi que le filtre lui-même, en comparant les résultats de différents filtres. Les critères de comparaison sont : **(a)** la différence des perturbations de gravité filtrées avec les anomalies de gravité mesurées au sol et prolongées vers le haut, et **(b)** la différence des perturbations de gravité ⁵ aux points de croisement des lignes de vol. Dans le cas du critère **(a)**, le problème est que dans la majorité des cas, les données sol n'existent pas. Même si cela était le cas, en choisissant le degré de filtrage selon ce critère, la gravimétrie aéroportée ne serait plus une méthode indépendante de mesure. D'autre part, la différence des anomalies aux points de croisement (critère **b**) est directement une fonction du degré de filtrage (le filtre qui lisse le plus donne des écarts plus petits). Dans le cas extrême d'un lissage à 100%, il n'y aurait plus d'écarts sur des valeurs nulles.
- Puisque le filtrage est généralement effectué dans le domaine fréquentiel, une seule fréquence de coupure est considérée pour l'ensemble de la région de mesure. Mais en réalité le contenu fréquentiel des mesures est différent pour chaque ligne de vol, et cela parce que les conditions de vol ne sont pas les mêmes et que le champ de gravité change d'une ligne à l'autre. De même, nous n'avons pas le même contenu fréquentiel sur les différentes parties d'une seule ligne de vol. Cela implique qu'avec le filtrage direct, il reste des effets systématiques sur les résultats dans certains endroits, alors que dans d'autres endroits le champ de gravité est sur-filtré.
- La fréquence de coupure du filtre est de l'ordre de 0,005 Hz [Olesen (2002)], ce qui est très proche à zéro. La conception d'un tel filtre n'est pas sans complexité : pour un filtre passe-bas, plus la fréquence de coupure s'approche de zéro, plus les distortions en sortie du filtre sont importantes [Vaseghi (2000)]. Ces distortions sont dues aux effets dits d'"aliasing" et de "leakage", qui sont des effets inhérents à la transformation de Fourier. Ces distortions existent toujours même en filtrage en domaine spatial, mais nous pouvons alors mieux les évaluer et/ou les minimiser.
- La valeur moyenne de la différence du champ modélisé en altitude et des valeurs de la gravité au sol prolongées à l'altitude de vol est un indicateur de l'exactitude⁶ du levé gravimétrique aéroporté. Aucune autre quantité ne peut être présentée comme un critère d'exactitude, qui est un critère externe. Par contre, la variance d'une quantité est un critère interne de sa précision, comme la différence aux points de croisement.

En Février 1998, un levé gravimétrique aéroporté a été réalisé sur la totalité des Alpes

⁵la perturbation de gravité est la différence de la gravité réelle au point de mesure et de la gravité normale calculée au même point.

⁶le mot "exactitude" est utilisé comme l'équivalent du mot "accuracy" en Anglais pour le distinguer du mot "precision" qui a une signification différente.

françaises avec un gravimètre LaCoste & Romberg modèle S, un gravimètre relatif stabilisé (gravimétrie scalaire). Cette thèse est basée sur le traitement de ces données.

1.4 Organisation du manuscrit

Le document est organisé en 3 parties :

1. Instrumentations et systèmes de mesure en gravimétrie aéroportée,
2. Modélisation mathématique,
3. Application des modèles sur les données.

Le **Chapitre 1** constitue la présente introduction.

Le **Chapitre 2** couvre la première partie de la thèse. Il est constitué de 3 sections : les systèmes de mesure GPS, INS et gravimètre. Chaque section explique en bref les éléments de base du système de mesure correspondant.

Nous avons d'abord travaillé sur la modélisation mathématique du gravimètre LaCoste & Romberg en dérivant les équations de la dynamique Newtonienne présentées dans un système de coordonnées lié au gravimètre. Le **Chapitres 3** décrit cette modélisation, sous la forme d'une équation différentielle.

Ensuite au **Chapitres 4**, à partir de ce modèle mathématique, nous avons développé une nouvelle méthode de filtrage dans le domaine spatial, méthode basée sur la transformation de l'équation différentielle du gravimètre en une équation intégrale. Pour résoudre cette équation, nous avons utilisé la méthode de régularisation en théorie des moindres carrés.

Une partie du **Chapitres 4** présente le détail des calculs numériques des paramètres nécessaires pour mise en œuvre de notre nouvelle méthode de filtrage.

Les données utilisées sont issues du levé Alpin, levé dont le déroulement est rappelé au **Chapitre 5**.

Nous avons enfin appliqué notre méthode de filtrage spatial sur ces données. Une comparaison avec les résultats du filtrage classique est effectuée à la fin de la thèse (**Chapitre 6**).

La structure générale de la thèse ainsi que les liaisons entre les différents chapitres sont présentées sur la Figure 1.1.

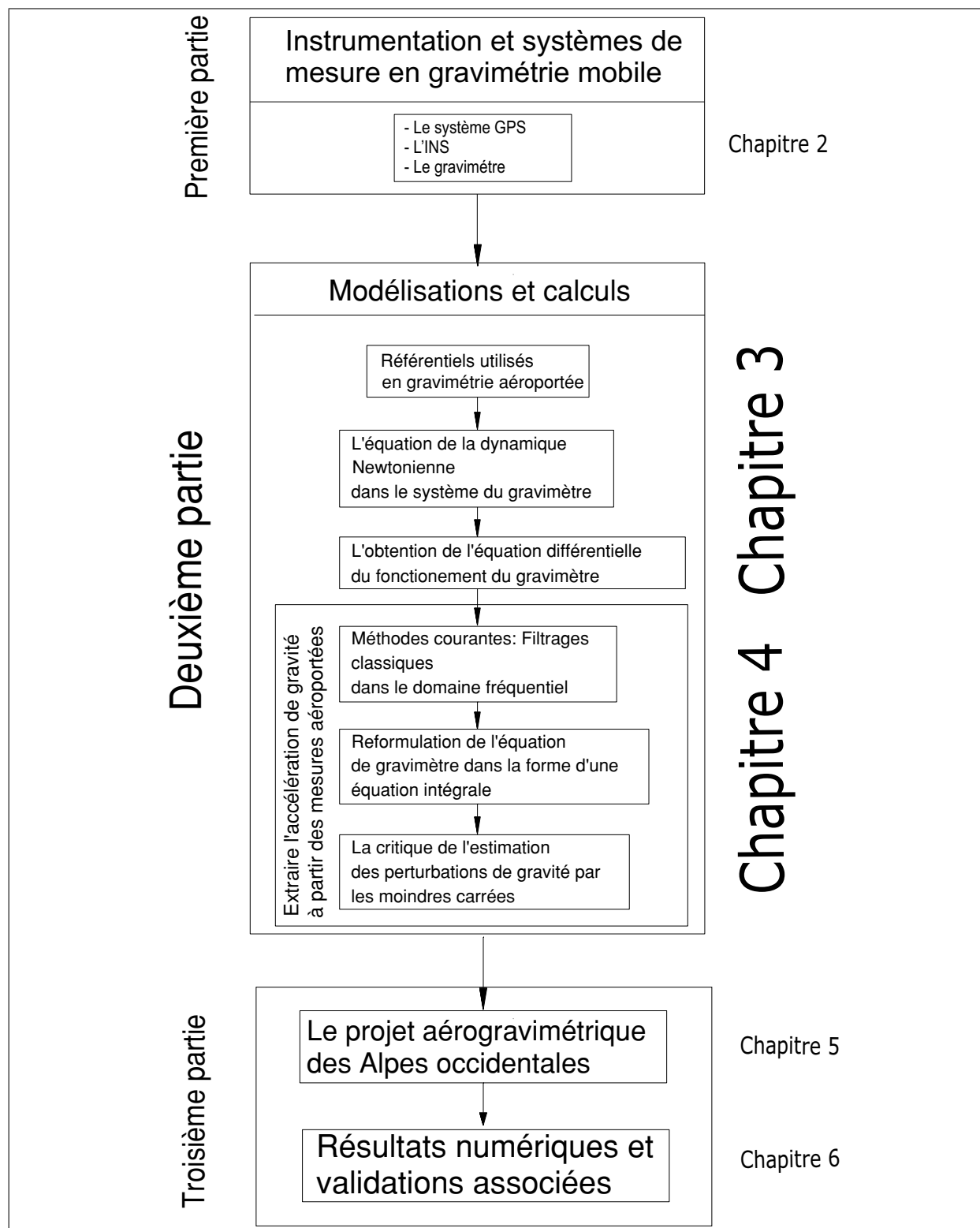


FIG. 1.1 – Diagramme des titres et des liaisons logiques entre les chapitres de la thèse.

INSTRUMENTATION ET SYSTÈMES DE MESURE EN GRAVIMÉTRIE AÉROPORTÉE

La gravimétrie mobile peut être effectuée à partir de différents véhicules comme avion, bateau, hélicoptère ou voiture. Mais le principe de base reste toujours identique. Au niveau de l'instrumentation, tout les systèmes de gravimétrie mobile sont constitués de deux parties principales :

- Une configuration multi-récepteur GPS fixée par rapport au véhicule
- Un capteur de gravité

Le GPS est utilisé en gravimétrie aéroportée pour la détermination :

- des positions de l'avion
- de la vitesse de l'avion
- de l'accélération de l'avion
- de l'attitude de l'avion.

Le fonctionnement du système GPS est largement commenté dans la littérature. Dans la première section de ce chapitre nous allons rappeler le positionnement cinématique relatif par GPS tel qu'il est utilisé en gravimétrie aéroportée et nous allons analyser les erreurs associées. Parmi les ouvrages de références sur le GPS on peut distinguer par exemple Leick (1990), Seeber (1993), Teunissen et Kleusberg (1996), Tiberius (1998), Hofmann-Wellenhof et al. (2001) et Leick (2004).

En gravimétrie aéroportée on cherche à obtenir une exactitude de quelques milliGals¹ sur la mesure de l'accélération de gravité. Sachant que les accélérations dues au mouvement de l'avion sont de l'ordre de quelque dizaines de milliers de mGals en phase de campagne de mesure, on conçoit que la gravimétrie aéroportée demande une très haute exactitude de positionnement par GPS (de l'ordre de quelques centimètres) pour déterminer les positions de l'avion et ses accélérations. Shi (1994) fait une analyse sur le GPS cinématique pour

¹ $1mGal = 0.001cm/sec^2 = 10^{-5}m/sec^2$

la gravimétrie aéroportée avec une configuration multi-récepteur et avance le chiffre de 10 centimètres pour l'exactitude du positionnement de l'avion dans les meilleurs cas.

La connaissance de l'attitude de l'avion durant la campagne de mesure est essentielle pour l'application des différentes transformations entre systèmes de coordonnées. Seule la configuration multi-récepteur nous permet de déterminer ces attitudes.

Un système de centrale inertielle (INS) couplé avec du GPS cinématique constitue un système autonome de gravimétrie, car il permet la mesure indépendante des accélérations cinématiques et de gravité. La deuxième section de ce chapitre présente le fonctionnement du système INS.

La troisième section est consacrée à la partie instrumentation du gravimètre stabilisé de LaCoste & Romberg .

2.1 Le système GPS utilisé en gravimétrie aéroportée

Le terme *positionnement relatif* ou *différentiel* par GPS est utilisé a contrario de positionnement absolu. Ce dernier mode utilise un seul récepteur pour le positionnement, alors qu'au positionnement relatif au moins deux récepteurs sont obligatoires, avec un récepteur installé sur un point dont les coordonnées sont connues avec précision. Les deux récepteurs observent les mêmes satellites en même temps. Le vecteur entre les deux stations s'appelle *ligne de base*. Le positionnement relatif permet de réduire considérablement l'impact des erreurs sur les orbites, sur la propagation des ondes dans l'atmosphère et sur les erreurs d'horloges satellites.

Le point inconnu peut être stationnaire ou mobile. Le terme *cinématique* est utilisé quand la station inconnue est mobile, ce qui est le cas en gravimétrie aéroportée .

Considérant l'avion comme une station GPS mobile, la ligne de base avion/station est déterminée à chaque instant. La précision du positionnement relatif dépendant largement de la longueur de la ligne de base, nous nous intéresserons désormais au réseau de stations terrestres. Lors d'un levé aéroporté à grande échelle, il est nécessaire d'avoir un réseau suffisant de stations terrestres, afin d'assurer la présence d'un récepteur proche de l'avion quelle que soit la position de celui-ci dans la région. Shi (1994) explique que pour obtenir une exactitude de 10 centimètres, la distance entre l'avion et la station terrestre ne doit pas dépasser quelques dizaines de kilomètres. Pour 165 km, l'exactitude du positionnement descend à 25 centimètres.

Sur l'avion, un seul récepteur de GPS ne suffira pas en toute rigueur pour la gravimétrie aéroportée, car le positionnement complet d'un solide dans l'espace nécessite la connaissance simultanée de la position de quatre de ses points. En effet, quatre points suffisent pour matérialiser un système de référence rigide (trois vecteurs) lié au solide. Ce système de référence peut être décrit dans un référentiel terrestre par six paramètres : les coordonnées d'un des points ainsi que les trois angles de rotation des vecteurs de base.

2.1.1 Mesures GPS

2.1.1.1 Les observables

Il y a deux observables principales en technique de positionnement GPS : les mesures de pseudodistance et de phase.

La mesure de pseudo-distance Les codes PRN¹ transmis par les satellites sont utilisés pour mesurer la distance entre le satellite et le récepteur. L'information temporelle est véhiculée par le code. Lorsque le code du satellite parvient au récepteur, il est en retard par rapport à la réplique du code générée par le récepteur d'une valeur qui correspond exactement au temps du trajet du signal. Pour calculer ce retard, le récepteur n'a plus qu'à estimer de combien il doit décaler son code pour qu'il soit parfaitement corrélé avec celui du satellite. La *pseudo-distance* correspond à ce décalage multiplié par la vitesse de la lumière. La raison de la dénomination "pseudo-distance" est qu'il existe un biais de synchronisation entre l'horloge du récepteur et celle du satellite ainsi que des biais dus à la propagation du signal dans l'atmosphère. La distance obtenue est donc affectée par ces biais. L'équation d'observation du code (pseudodistance) s'écrit donc

$$P_r^k = \rho_r^k - (\delta t_r - \delta t^k)c + \text{erreurs} \quad (2.1)$$

avec :

indice r	récepteur r
indice k	satellite k
P_r^k	pseudodistance entre satellite et récepteur
$\rho_r^k = (t_r - t^k)c$	distance géométrique entre satellite et récepteur
t_r	temps réel de la réception du signal par le récepteur
t^k	temps réel de l'émission du signal par le satellite
δt_r	erreur d'horloge du récepteur
δt^k	erreur d'horloge du satellite
c	vitesse de la lumière

La mesure de phase Pour obtenir une précision de localisation sub-décimétrique, l'utilisation de pseudo-distance ne suffit plus². Nous devons considérer la mesure de la phase des ondes porteuses.

Le récepteur peut suivre la phase de l'onde porteuse à partir du moment où il commence les mesures pour un satellite. Il reste une partie inconnue qui est le nombre de cycles entiers entre le satellite et le récepteur, que l'on appelle *ambiguïté de phase*. L'équation

¹Pseudo Random Noise

²La longueur de corrélation est de 300 mètres sur le code C/A et de 30 mètres sur le code P. Même si les récepteurs sont capables de mesurer le code avec une précision d'environ un centième de cycle, la précision ne pourra être meilleure que le mètre sur le code C/A. Or le code C/A est le seul accessible aux civils.

d'observation de base s'écrit sous la forme

$$\Phi_{r,i}^k = \rho_r^k - \lambda_i N_{r,i}^k - (\delta t_r - \delta t^k)c + \text{erreurs} \quad (2.2)$$

Les notations sont identiques à l'Equation (2.1), avec :

i=1 ou 2	mesures sur les fréquences $L1$ ou $L2$ respectivement
$\Phi_{r,i}^k$	phase de l'onde L_i envoyée par le satellite k , mesurée par le récepteur r et convertie en unité de longueur
$N_{r,i}^k$	ambiguïté de phase de L_i pour le satellite k , mesurée par le récepteur r
λ_i	longueur d'onde correspondant à L_i

Pour un positionnement précis, il faut que l'observable de phase soit utilisée comme mesure fondamentale [Bruton (2000)]. Les autres observables peuvent servir comme données auxiliaires.

2.1.1.2 Bilan des erreurs et biais des mesures GPS

Un certain nombre de facteurs naturels et instrumentaux limitent la précision du GPS. La plupart de ces biais et erreurs sont non-aléatoires. Par exemple, l'erreur d'horloge d'un satellite particulier reste identique pour tout les récepteurs. En différentiant alors ces mesures, ces erreurs sont éliminées ou considérablement diminuées. C'est la raison pour laquelle on utilise les mesures différenciées pour les calculs de positions.

Les cause principales des erreurs sur les mesures GPS sont :

- Une mauvaise qualité de l'orbite. Aujourd'hui la qualité de la détermination des orbites radio-diffusées est de quelques mètres, ce qui ne permet pas de garantir une détermination centimétrique pour une ligne de base de plus de 50 km. Il existe aujourd'hui le service international IGS¹ qui diffuse au travers du Web des orbites précises dont la qualité est meilleure que 10 cm. Pour un positionnement plus précis, on peut donc utiliser ces orbites précises, mais a posteriori.

- La présence de l'ionosphère. En traversant l'ionosphère (partie ionisée de l'atmosphère, de 50 à 1500 km d'altitude), le temps de trajet des ondes GPS s'allonge. Le retard ionosphérique peut atteindre 50 mètres en fonction de l'état de l'ionosphère ainsi que de l'angle entre trajet du signal et horizon.

Ce retard dépend de la fréquence et donc l'utilisation de deux fréquences va permettre d'éliminer ce retard ionosphérique. Pourtant, même en utilisant des récepteurs monofréquences, les effets atmosphériques peuvent être considérablement diminués par différenciation. L'efficacité de la technique de différenciation est fonction de la longueur de ligne de base. Cependant, il est impossible avec des récepteurs monofréquences d'éliminer complètement les effets de l'ionosphère, et Bruton (2000) insiste sur le fait que sous des conditions

¹International GNSS Service

de forte d'activité ionosphérique, les récepteurs monofréquence ne donneront pas une précision suffisante pour l'utilisation en gravimétrie aéroportée.

- La présence de la *troposphère*. Elle produit une réduction variable de la vitesse de l'onde transmise, ce qui allonge le temps de parcours. L'amplitude de la réduction dépend essentiellement des conditions météorologiques et de l'élévation du satellite. L'erreur est minimum au zénith (environ 2,2 mètres) et à 5 degré d'élévation est d'environ 20 mètres [Bouteloup (2003)]. A une élévation de zéro degré (horizon), la valeur du retard troposphérique peut atteindre plusieurs centaines de mètres et est impossible à modéliser. Pour cette raison, un angle de masque (entre 10 et 15 degrés) est choisi, et toutes les observations entre l'horizon et cet angle sont exclues.

Le retard troposphérique ne dépend pas de la fréquence, et ne peut donc être annulé par l'utilisation de deux fréquences. Dans le cas des mesures aéroportées, et surtout quand l'altitude de vol est haute, le problème du retard troposphérique peut devenir plus sérieux. En effet, lors de la différentiation des observables, la différence d'altitude entre les récepteurs fixes et mobiles, devient appréciable dans l'effet résiduel troposphérique. Il faut donc utiliser un modèle et/ou ajuster des paramètres supplémentaires lors des calculs finaux.

Aujourd'hui l'effet de la troposphère est le facteur limitant le plus important pour la détermination précise des positions. Pour une ligne de base de 150 *km*, et même dans les meilleurs conditions une erreur de 10-15 *cm* est probable [Bruton (2000)]. L'effet troposphérique détériore surtout la détermination de la composante verticale.

- La présence de *multitrajets*. Ce sont des trajets affectés de réflexions parasites (sol, constructions, arbres, ...) enregistrés par le récepteur comme mesures directes. Le signal réfléchi par ces différents obstacles mettra plus de temps pour parvenir au récepteur. Ce retard se traduira bien sûr par une erreur sur la distance satellite-récepteur et donc par une erreur sur la position mesurée. Il n'y a aucun moyen de modéliser cette erreur. Pourtant, certaines antennes, comme les antennes "choke-ring", sont moins sensibles à cette erreur, mais leur installation sur l'avion est inconfortable. Pour un avion équipé d'un groupe d'antennes, Bruton (2000) obtient une erreur de l'ordre de 3 *cm* pour l'effet des multitrajets sur la position.

- La *géométrie* de la constellation visible de satellites. La précision des mesures dépend du nombre des satellites visibles et de leur répartition sur l'hémisphère céleste. Selon Bruton (2000), une géométrie non adéquate (mauvaise séparation angulaire des satellites) peut être à l'origine d'une erreur de 50 *cm* sur la position de l'avion.

- La *dégradation volontaire* de la performance. Il y a une dégradation volontaire des performances du système GPS par les militaires américains (le DoD¹), dénommée l'A.S. (anti-leurrage²). L'A.S. transforme le code P en code dit 'Y' qui n'est plus complètement reconstitué par les récepteurs. Pourtant, il existe aujourd'hui des récepteurs nommés "codeless" qui ne produisent plus de réplique des codes, mais décodent les signaux par des techniques sophistiquées de corrélation. Leurs prix sont relativement élevés, mais avec leur

¹Department of Defence

²Anti Spoofing

apparition la dégradation volontaire n'aura plus de sens dans les années qui viennent.

- L'erreur d'horloge des satellites et du récepteur. Ces erreurs sont pratiquement éliminées par la différentiation des observables.
- D'autres sources d'erreur. Par exemple on peut mentionner la non-stabilité des antennes (variation du centre de phase) et aussi les effets relativistes sur les mesures.

2.1.2 Observables différenciées

La différentiation des données originales, code ou phase, permet d'éliminer ou de réduire certains biais et aussi de réduire la taille des calculs.

2.1.2.1 L'équation d'observation non-différenciée

En considérant toutes ces sources d'erreur, l'équation d'observation non différenciée ou "zéro-différenciée" (ZD¹) de la phase s'écrit sous la forme :

$$\Phi_{r,i}^k = \rho_r^k - \lambda_i N_{r,i}^k + d\rho_{orb} - \delta\text{ion}_{r,i}^k + \delta\text{trop}_r^k + (\delta t_r - \delta t^k)c - \delta m_{r,\Phi}^k + \epsilon_\Phi \quad (2.3)$$

Les notations sont les mêmes que pour l'équation (2.2) avec :

$d\rho_{orb}$	erreur orbitale
$\delta\text{ion}_{r,i}^k$	délai ionosphérique
δtrop_r^k	délai troposphérique
δt_r	erreur d'horloge du récepteur
δt^k	erreur d'horloge du satellite
$\delta m_{r,\Phi}^k$	multi-trajet
ϵ_Φ	bruit de mesure de la phase

Le problème principal des observations de phase est l'estimation des ambiguïtés de phase en tant que nombres entiers. Il existe pour cela plusieurs méthodes numériques. Mais en général la qualité de la fixation des ambiguïtés dépend de la qualité des observations ainsi que de la longueur de la ligne de base [Klingelé et al. (1996)].

L'une des difficultés rencontrées lors des observations, et qui dégrade fortement la qualité de positionnement est due à l'interruption du signal. Avec chaque interruption (*sauts de cycles*²), l'observation de phase recommence à zéro et une nouvelle ambiguïté de phase apparaît. L'étape numéro un des calculs GPS est de les détecter et les réparer. Il existe plusieurs méthodes pour détecter les sauts de cycles, notamment la méthode des triples différences ou l'utilisation des ondelettes. Pour la gravimétrie aéroportée, les distances entre récepteurs sur l'avion sont connues. La comparaison entre ces distances et les distances mesurées correspondantes est aussi un moyen de détecter les éventuels sauts de cycles.

¹zero-differenced observation equation

²cycle slip

2.1.2.2 La simple différence

La simple différence (SD) consiste à former à un instant donné la différence de mesures entre un satellite et deux récepteurs. On constate que cette différence permet d'éliminer les décalages d'horloges satellites et de réduire l'influence des autres erreurs, comme les effets atmosphérique et les erreurs d'orbites, en fonction de la longueur de la ligne de base.

La relation d'observation (2.3) devient :

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{r,i}^k = & \quad \Delta\rho_r^k - \lambda_i\Delta N_{r,i}^k + \Delta d\rho_{\text{orb}} - \Delta\delta\text{ion}_{r,i}^k + \Delta\delta\text{trop}_r^k \\ & + \quad c\Delta\delta t_r - \Delta\delta m_{r,\Phi}^k + \Delta\epsilon_\Phi \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.1.2.3 La double différence

Le double différence (DD) est la différence de deux simples différences à un instant donné entre deux satellites et deux récepteurs. Cette combinaison permet d'éliminer les erreurs d'horloges récepteur et de réduire les effets des perturbations atmosphériques et des erreurs d'orbites. La relation d'observation des doubles différences est

$$\begin{aligned} \nabla\Delta\Phi_{r,i}^k = & \quad \nabla\Delta\rho_r^k - \lambda_i\nabla\Delta N_{r,i}^k + \nabla\Delta d\rho_{\text{orb}} - \nabla\Delta\delta\text{ion}_{r,i}^k + \nabla\Delta\delta\text{trop}_r^k \\ & - \quad \nabla\Delta\delta m_{r,\Phi}^k + \nabla\Delta\epsilon_\Phi \end{aligned} \quad (2.5)$$

Cette équation d'observation peut être écrite pour chaque paire de satellites, ce qui résulte en $n - 1$ équations linéairement indépendantes où n est le nombre de satellites à chaque époque.

2.1.2.4 La triple différence

La triple différence (TD) est la différence de deux doubles différences pour deux époques directement consécutives. Cette différence élimine les ambiguïtés entières et elle est d'ailleurs utilisée principalement pour rechercher et éliminer les sauts de cycles. La relation d'observation devient :

$$\begin{aligned} T\nabla\Delta\Phi_{r,i}^k = & \quad T\nabla\Delta\rho_r^k + T\nabla\Delta d\rho_{\text{orb}} - T\nabla\Delta\delta\text{ion}_{r,i}^k + T\nabla\Delta\delta\text{trop}_r^k \\ & - \quad T\nabla\Delta\delta m_{r,\Phi}^k + T\nabla\Delta\epsilon_\Phi \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.1.3 Combinaison linéaire de mesures

Certaines des combinaisons entre les différents types possibles de mesures GPS possèdent des caractéristiques utiles pour le traitement des données.

2.1.3.1 Combinaison "ionosphere free"

L'une des plus importantes de ces combinaisons s'appelle "ionosphere free" et est de la forme :

$$\begin{aligned}\Phi_3 &= \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} \Phi_1 - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \Phi_2 \\ &= 2,55\Phi_1 - 1,55\Phi_2\end{aligned}\tag{2.7}$$

où $f_1 = 1575,42$ MHz et $f_2 = 1227,60$ MHz sont respectivement des fréquences des ondes porteuses L1 et L2. La combinaison Φ_3 élimine mathématiquement le terme relatif à l'ionosphère [Hugentobler et al. (2001)]. Pour les mesures de code cette combinaison est possible si le récepteur est capable de détecter le code P/Y (parce que l'onde L2 est seulement modulée par le code P/Y) ou s'il est "codeless". Cette combinaison est utilisée par la majorité des logiciels traitant des données bifréquences afin de construire des doubles différences.

2.1.3.2 Combinaison "geometry free"

Une combinaison de type

$$\Phi_4 = \Phi_1 - \Phi_2\tag{2.8}$$

est indépendante des horloges des récepteurs et de la géométrie (orbites et coordonnées des stations). Pour cette raison elle s'appelle "geometry free" et peut être utilisée pour l'estimation des modèles ionosphériques.

2.1.3.3 Combinaison "wide-lane"

Une autre combinaison, nommée la combinaison "wide-lane" est donnée par

$$\Phi_5 = \frac{1}{f_1 - f_2} (f_1 \Phi_1 - f_2 \Phi_2)\tag{2.9}$$

La raison de cette dénomination est que la longueur d'onde correspondante est d'environ 86 cm soit à peu près quatre fois celle de L1 ou L2. Il est donc plus facile de fixer l'ambiguïté de cette longueur d'onde que celle de L1 ou L2. On remarque que

$$N_5 = N_1 - N_2$$

N_5 est appelée ambiguïté "wide-lane".

Cette combinaison est aussi utilisée pour détecter les sauts de cycle.

2.1.3.4 Combinaison Melbourne-Wübbena

Cette combinaison est faite entre les mesures de phase (Φ_1 et Φ_2) et les mesures de code (P_1 et P_2), et est donnée par

$$\Phi_6 = \frac{1}{f_1 - f_2}(f_1\Phi_1 - f_2\Phi_2) - \frac{1}{f_1 + f_2}(f_1P_1 + f_2P_2) \quad (2.10)$$

Elle élimine les effets ionosphériques et troposphériques, l'erreur d'horloge et l'erreur due à la mauvaise géométrie des satellites [Hugentobler et al. (2001)].

2.1.4 Traitement des données

Il n'existe pas de méthode unique pour traiter les données GPS. Selon les conditions de mesure, la stratégie choisie peut varier d'un levé à l'autre. Mais, d'une manière générale, le traitement des données se fait toujours en trois étapes :

- pré-traitement,
- construction du modèle mathématique (équations d'observation),
- inversion pour la détermination des coordonnées.

Le pré-traitement des données consiste à identifier les erreurs grossières (sauts de cycle, etc) et à appliquer éventuellement des corrections dues aux effets systématiques (ionosphère, troposphère, orbites, etc). Le choix de la stratégie de traitement fait également partie du pré-traitement des données.

- Quels types de mesures seront utilisées pour construire le modèle mathématique ? Phase, pseudo-distance ou les deux à la fois ?
- Quelles combinaisons linéaires entre les mesures ("ionosphere free", "wide-lane", ...) seront employées ? Ceci dépend du types des mesures effectuées.
- Quel type d'observable différenciée sera utilisé ? ZD, SD, DD ou TD ?
- Est-ce que les modèles de correction (ionosphère, troposphère, orbites, etc) seront introduits dans les systèmes d'équations ? Dans ce cas, les paramètres des modèles seront obtenus en même temps que les autres paramètres, et par conséquence le nombre des inconnues sera augmenté.

Le modèle mathématique choisi pour construire le système d'équations d'observation est souvent du type (2.3) ou (2.5). Fondamentalement, il n'existe pas de différence entre les résultats obtenus par les équations d'observation différenciées et non-différenciées. Les équations d'observation ZD (2.3) sont généralement appliquées pour un positionnement absolu précis (PPP¹) ou bien pour obtenir des informations sur les horloges satellites et récepteurs. L'inconvénient de l'approche ZD est que le nombre de paramètres à estimer est plus élevé.

¹Precise Point Positioning

Pour le positionnement relatif, les doubles différences des observations de phase sont utilisées pour construire les systèmes d'équations. On rappelle que pour l'équation (2.5) les observables Φ_1 , Φ_2 ou Φ_3 "ionospheric free" introduites par (2.7) peuvent être utilisées.

Pour une seule ligne de base, et pour chaque époque, l'équation (2.5) est écrite $(n - 1)$ fois, où n est le nombre des satellites visibles. Après linéarisation par rapport à la position du point inconnu, nous sommes conduits à un système linéaire d'équations de la forme

$$\mathbf{L} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{w} + \mathbf{r} \quad (2.11)$$

avec :

\mathbf{L}	vecteur $(n - 1) \times 1$ des doubles différences de phase,
\mathbf{w}	vecteur $(n - 1) \times 1$ des ambiguïtés inconnues,
\mathbf{x}	vecteur 3×1 des coordonnées inconnues,
\mathbf{r}	vecteur $(n - 1) \times 1$ des bruits des observations,
\mathbf{A} et \mathbf{B}	matrices de liaisons.

Les ambiguïtés entières, comme nous l'avons vu, sont inconnues et doivent être estimées en valeurs entières. Bruton (2000) explique qu'en positionnement cinématique pour les lignes de bases de longueur moyenne, l'effet de la non-fixation des ambiguïtés peut atteindre 10 cm sur les positions estimées. Il explique de plus qu'avec seulement des mesures de phase sur L1, il est quasiment impossible de figer les ambiguïtés. En revanche, une combinaison linéaire de L1 et L2 de type "wide-lane" (2.9) permet d'obtenir les ambiguïtés entières. Cette combinaison permet de résoudre l'ambiguïté "wide-lane", c'est à dire la différence des deux ambiguïtés $N_1 - N_2$, avec précision. Cette quantité entre ensuite comme une contrainte dans le système d'équation dans lequel il faut résoudre N_1 et N_2 .

Généralement, l'équation (2.11) est l'équation d'observation de base. D'autres types d'observations peuvent être ajoutées, par exemple les équations d'observation de code, surtout de type "ionospheric free" P_3 . Egalement, pour la gravimétrie aéroportée, il est possible d'ajouter d'autres contraintes, comme une contrainte sur l'attitude du véhicule (par les mesures gyroscopiques), ou une contrainte entre mesures à différentes époques (par le biais d'une fonction d'autocovariance). Le point important ici est la pondération correcte des observables.

L'inversion du système (2.11) obtenu se fait par moindres carrés. Des méthodes récursives comme les moindres carrés récursifs ou le filtrage de Kalman sont aussi utilisées pour le positionnement cinématique [Shi (1994)]. Ce dernier est souvent appliqué pour obtenir une trajectoire en temps réel. Pour un post-traitement, plus de contraintes peuvent être considérées, par exemple en faisant les calculs une fois pour la trajectoire aller et une fois pour la trajectoire retour.

2.2 Le Système de Navigation Inertielle (INS)

Le principe de la navigation inertielle est relativement simple : si on connaît à un instant donné la position et la vitesse d'un véhicule, et qu'on est capable de mesurer à chaque instant le vecteur accélération du mouvement suivi, on peut alors par intégration numérique calculer à chaque instant sa vitesse et sa position.

L'INS a été introduit comme un instrument de positionnement cinématique pour les géomètres à la fin des années 1960. Mais la capacité du système pour le positionnement précis est limitée à cause des variations spatiales du champ de gravité [Vaníček et Krakiwsky (1986)], car un accéléromètre est un appareil qui mesure l'accélération totale à laquelle il est soumis, incluant la pesanteur. Les accélérations dues au mouvement du véhicule sont bien sûr pour nous du "bruit".

En revanche, cela signifie que le champ de gravité peut être déterminé dans l'espace tri-dimensionnel si la position cinématiques ou/et la vitesse du véhicule sont connues avec une précision suffisante. Dans ce cas, l'INS combiné avec du positionnement GPS, peut être utilisé comme système autonome de gravimétrie mobile.

Une centrale inertielle (CI ou IMU¹) est composé de deux familles d'instruments :

- des accéléromètres
- des gyroscopes

En ajoutant un calculateur qui permet à un véhicule de connaître par l'intégration d'accélération sa position et sa vitesse dans l'espace, la CI devient un *système de navigation inertielle* SNI (ou INS).

2.2.1 Les types d'accéléromètres

Les accéléromètres sont des appareils qui mesurent par leur principe une force proportionnelle à l'accélération subie, mesurée suivant une direction particulière, dite axe sensible. Autrement dit, un accéléromètre vertical stationnaire sur la surface de la terre, mesure environ 980 *Gal*, ce qui est la réaction du corps d'épreuve à la force de la pesanteur. Un accéléromètre vertical dans un ascenseur en chute libre ne mesurerait donc rien.

On distingue six grandes catégories d'accéléromètres suivant le principe de mesure utilisé [Verdun (2000)] :

- les accéléromètres pendulaires²,
- les accéléromètres à équilibrage de masse³,

¹Inertial Measurement Unit

²pendulous accelerometers

³force-balance accelerometers

- les accéléromètres à cristal vibrant¹,
- les accéléromètres à lévitation électrostatique²,
- les accéléromètres miniatures à silicium³,
- les accéléromètres supraconducteurs⁴.

Selon le principe utilisé, le niveau de bruit et par conséquent le niveau de prix pour chaque accéléromètre est différent. Pour les raisons techniques, certains accéléromètres comme les accéléromètres supraconducteurs ne peuvent pas être utilisés pour les objectifs cinématiques (ou ne sont pas tout à fait opérationnels).

2.2.2 Les type de gyroscopes

Les gyroscopes ont deux propriétés fondamentales :

- Ils gardent une direction fixe par rapport aux étoiles à partir du moment où ils sont en rotation rapide (principe d'inertie), s'ils sont non soumis à des couples perturbateurs,
- Ils réagissent perpendiculairement à tout couple imposé (principe du couple gyroscopique).

Il existent deux principaux types de gyroscope :

- les gyroscopes mécaniques,
- les gyroscopes optiques

La Figure 2.1 représente le principe d'un gyroscope mécanique. Un gyroscope mécanique est un solide en rotation autour d'un axe Δ . Le moment cinétique de la masse en rotation est un vecteur défini par $\vec{L} = I\vec{\omega}$, où I est le moment d'inertie de la masse par rapport à l'axe Δ et $\vec{\omega}$ est le vecteur de la vitesse angulaire. La deuxième loi de Newton sur les mouvements rotationnels, est à la base du fonctionnement des gyroscopes mécaniques : si le moment des forces appliquées $\vec{\tau}$ est nul, alors le moment angulaire \vec{L} , est conservé :

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Autrement dit, en l'absence de toute force extérieure, le gyroscope garde une direction fixe dans l'espace inertiel.

Un gyroscope sollicité par un moment $\vec{\tau}$, suivant une direction différente de celle de \vec{L} , répond en déplaçant son axe de rotation de $\vec{\omega}$ en $\vec{\omega}'$, de direction distincte de \vec{L} et

¹quartz vibrating beam accelerometers

²electrostatically suspended accelerometers

³silicon micromachined accelerometers

⁴superconducting accelerometers

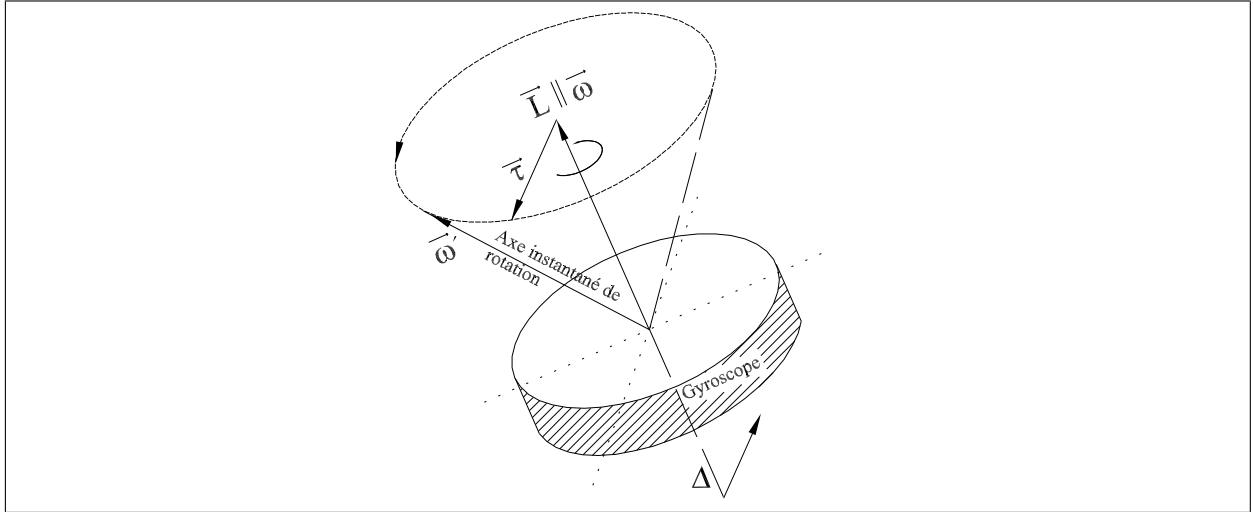


FIG. 2.1 – Principe d'un gyroscope mécanique

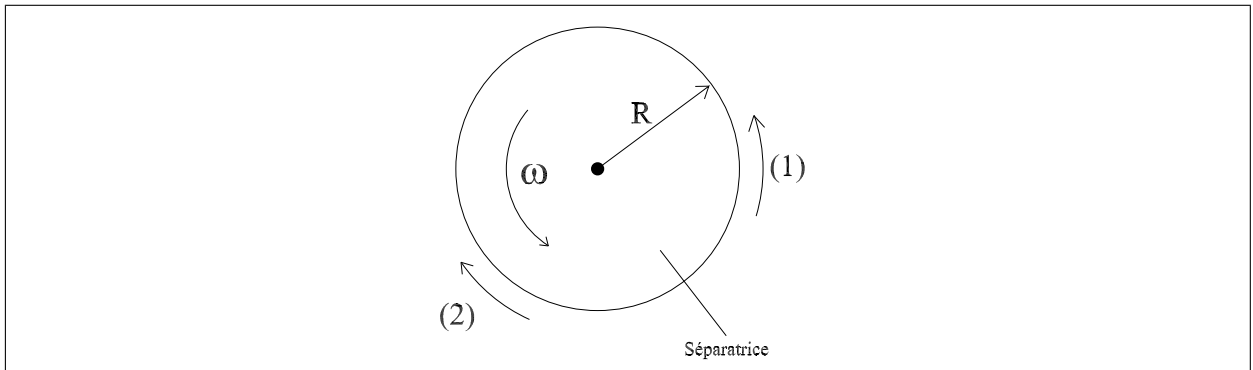


FIG. 2.2 – L'effet Sagnac.

tournant autour de celui-ci. Ce mouvement s'appelle *précession*. En détectant la précession du gyroscope, on peut en déduire le changement d'orientation du mobile.

Le principe physique utilisé pour les gyroscopes optiques est l'*effet Sagnac*. Cette effet est expliqué par la Figure 2.2. Les deux faisceaux laser (1) et (2) commencent leur parcours à partir de la lame séparatrice. Quand la vitesse rotationnelle ω est zéro (l'appareil est au repos), les temps que mettent les ondes pour faire un tour sont égaux. Supposons maintenant que le système ait une vitesse angulaire ω . Deux ondes partent au même instant d'une origine commune, appelée séparatrice. L'onde (1) va alors avoir un parcours légèrement plus long, alors que l'onde (2) avoir un parcours légèrement plus court du fait que le système tourne sur lui-même pendant le temps de propagation. En mesurant la différence entre ces temps de parcours, on peut en déduire la vitesse de rotation du système par rapport à l'axe du gyroscope.

Pour être capable de modéliser la position en trois dimensions du mobile, la centrale inertielle doit comporter trois accéléromètres mesurant les accélérations linéaires (c'est la

raison pour laquelle ce système peut être utilisé pour la gravimétrie aéroportée vectorielle). Trois gyroscopes mesurent en plus les vitesses angulaires pour avoir l'orientation du mobile dans l'espace. Le calculateur effectue ensuite les calculs qui permettent de passer des informations retournées par les gyroscopes et les accéléromètres à la position et à la vitesse du véhicule. En fait, il doit faire une intégration de l'accélération pour trouver la vitesse, puis une deuxième intégration de la vitesse pour en déduire la position.

Les systèmes de navigation inertiels ont en théorie l'avantage de ne pas avoir besoin de références externes, contrairement au GPS qui dépend des satellites disponibles. Ils donnent des bonnes précisions, mais à court terme. En plus ils ont une taille raisonnablement réduite pour envisager tout types d'applications. Ce dernier point est un grand avantage en gravimétrie aéroportée, car les autres systèmes en général sont assez encombrants.

Cependant, les données du capteur inertiel dérivent avec le temps en raison de la nécessité d'intégrer les données brutes pour rapporter la position. N'importe quelle petite erreur constante est ainsi amplifiée après intégration. Les capteurs inertiels sont peu utilisables pour le positionnement précis sur une longue période de temps. D'ailleurs, étant un système de navigation à l'estime, la position et la vitesse sont toujours calculées à partir des conditions initiales, qui doivent être fournies par un dispositif extérieur.

2.2.3 Les types d'INS

Il y a deux types principales d'INS [Dwaik (1998)] :

- l'INS sur plate-forme,
- l'INS à axes liés ("strapdown INS").

Le premier type, aussi appelé "space-stabilized navigator", utilise des gyroscopes mécaniques. Leur attitude est conservée dans le temps, isolée des mouvements du véhicule, et le positionnement se fait simplement par double intégration des accélérations. Il existe plusieurs types de plate-forme et nous allons en détailler certaines dans la section qui suit.

Le système INS à axes liés ("strapdown INS") remplace les mouvements mécaniques par des calculs. Dans ce système accéléromètres et gyroscopes sont fixés rigidement à l'élément en mouvement. Attitude et position se calculent à partir des informations gyroscopiques et accélérométriques. Ces systèmes « strapdown » sont des structures plus simples et sont aussi plus résistants aux chocs. Ils sont très avantageux au niveau des coûts et de l'encombrement de l'appareil. En contrepartie, ils n'atteignent pas encore la précision des systèmes montés sur plate-forme [Abuhadrous (2005)]. Cependant, les scientifiques qui travaillent en gravimétrie aéroportée utilisent souvent l'INS à axes liés.

2.3 Le gravimètre stabilisé de LaCoste & Romberg

Comme nous avons expliqué en section 1.2, un gravimètre (un accéléromètre vertical) monté sur une plate-forme stabilisée et associé à un système de positionnement GPS forme un système de gravimétrie mobile scalaire. Malgré sa technologie peu récente qui remonte aux années 1950, ce système est le plus utilisé au monde. Ce système est assez lourd et cher, mais au niveau précision il reste le meilleur système actuel de gravimétrie mobile. Pourtant, Glennie et al. (2000) avancent que le système INS/GPS peut fournir le même niveau d'exactitude et proposent de combiner les deux méthodes pour augmenter leur performance commune.

La liste suivante présente les cinq systèmes gravimétriques à plate-forme stabilisée qui existent aujourd'hui :

- Chekan-A, du "Central Scientific and Research Institute (CSRI), ELEKTROPRI-BOR, State Research Center of the Russian Federation", [Abdelmoula (2001)]
- GT-1A, à l'origine un système Russe, commercialisé par la société Canadian Micro Gravity, [Lane (2004)]
- BGM-3, de la société Bell Aerospace Textron, [Bell et al. (1999)]
- KSS-31, de la société Bodenseewerke Geosystem GmBH, [Weigelt et Jokat (2001)]
- Le gravimètre stabilisé marin/aérien model S et model SL de la société LaCoste & Romberg¹, [Klingelé et al. (1996)] et [LaCoste (1967)].

Le premier système, développé en Russie pour la navigation sous marine, est utilisé par l'"Institute of Flight Guidance (IFF)"² en Allemagne. Pour l'utilisation en gravimétrie aéroportée, ils ont introduit plusieurs modifications sur ce système et les premiers résultats semblent satisfaisants. Des informations précises sur les spécifications de ce système russe sont néanmoins indisponibles.

Le Tableau 2.1 compare les autres systèmes. Le système GT-1A a été introduit pour la première fois en Avril 2003. Il a été développé par la société russe "Joint Stock Company Gravimetric Technologies" pour les applications militaires et civiles. Hors de la Russie, il a été commercialisé par la société Canadian Micro Gravity³. Le système est composé d'un capteur gravimétrique installé sur une plate-forme stabilisée du type Schuler à trois axes (cf. sous-section 2.3.2). Grâce à un logiciel contrôleur prévu dans le système, le gravimètre GT-1A est totalement automatisé et il n'y a plus besoin d'opérateur pendant le vol. Les résultats publiés obtenus par ce système sont de haute qualité. Pour un exemple d'utilisation voir Gabell et al. (2004).

Brozena (1992) explique succinctement le fonctionnement des trois derniers gravimètres. Le capteur du système KSS-31 est composé d'un tube libre de se déplacer dans la direction verticale, maintenu latéralement par cinq ressorts. Un sixième ressort, fixé à l'in-

¹LaCoste & Romberg Model "S" and model "SL" Air/Sea Dynamic gravimeters

²<http://www.tu-braunschweig.de/iff/institut>

³<http://www.canadianmicrogravity.com>

térieur du tube, s'oppose à la pesanteur et le maintient en équilibre. Les déplacements du tube, dus aux variations de la pesanteur et bien évidemment dus aux autres accélérations, sont détectés par un capteur de position.

Le gravimètre Bell BGM-3 est la troisième génération de série des gravimètres marins Bell BGM, adaptée pour les mesures aéroportées. Sa caractéristique marquante par rapport aux autres gravimètres est sa gamme de mesure extrêmement large, qui lui permet de fonctionner dans des conditions fortement perturbées. Son principe de fonctionnement est l'équilibrage d'une masse électromagnétiquement suspendue (un accéléromètre à lévitation électrostatique ; cf. sous-section 2.2). L'accélération est proportionnelle au courant électrique nécessaire pour garder la masse à la position nulle.

Le principe du système gravimétrique LaCoste & Romberg, utilisé lors du levé alpin, sera présenté dans cette section. [LaCoste (1967)], [Valliant (1991)], [LaCoste&Romberg (1998)] et [Verdun (2000)] sont les principales références utilisées.

TAB. 2.1 – Performances comparées des systèmes gravimétriques (n.d. : information non disponible). D'après Verdun (2000) et Gabell et al. (2004)

Caractéristiques	Bell BGM-3	KSS-31	L&R model S	GT-1A
Capteur				
Gamme de mesure (mGal)	30000	10000	12000	8000
Dérive (mGal/jour)	<0,1	<0,1	<0,1	<0,03 (corrigé)
Précision statique (mGal)	$\pm 0,01$	$\pm 0,001$	$\pm 0,002$	$\pm 0,2$
Précision dynamique (mGal)	$\pm 0,1 \dots 0,3$	$\pm 0,1$	$\pm 0,05 \dots 0,2$	$\pm 0,3 \dots 0,5$
Principe	équilibrage de masse	peson vertical	peson à fléau	peson vertical
Stabilisation				
Précision sur la verticale (")	n.d.	10	8	n.d.
Liberté angulaire (°)	n.d.	± 40	± 30	± 45
Poid du système entier(kg)	83	n.d.	79	110

2.3.1 Capteur du gravimètre LaCoste & Romberg

Le capteur du gravimètre LaCoste & Romberg model S est un *accéléromètre à ressort suramorti*¹. Le ressort utilisé est un ressort dit de *longueur nulle*². Un ressort à longueur nulle est un ressort dont la longueur non-étirée est "nulle". Nous allons maintenant justifier mathématiquement la nécessité du ressort à longueur nulle et du suramortissement du système.

¹overdamped spring-type accelerometer

²zero-length spring

2.3.1.1 Pourquoi le ressort de longueur "nulle" ?

Le schéma simplifié du capteur gravimétrique est présenté sur la Figure 2.3.

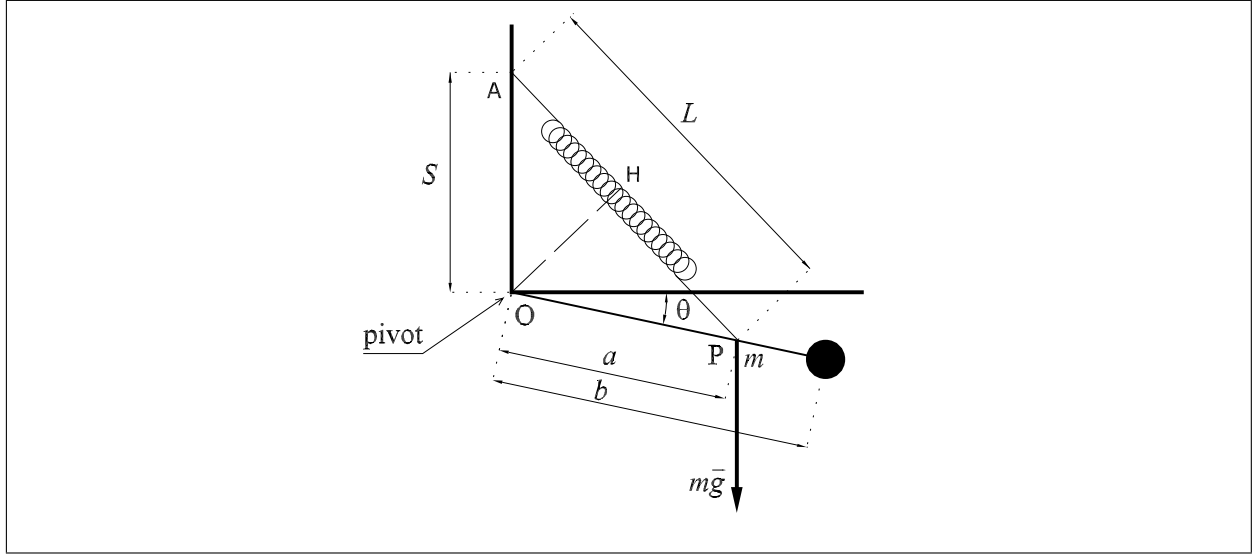


FIG. 2.3 – Schéma simplifié du capteur du gravimètre LaCoste & Romberg.

Pour l'instant, on néglige les phénomènes de frottement et d'amortissement. Le capteur est constitué d'un *fléau*¹, muni d'un corps d'épreuve à l'une de ses extrémités, et suspendu par un ressort incliné. Le fléau peut pivoter autour d'un axe horizontal passant par O. Il présente à chaque instant t un angle $\theta(t)$ avec l'horizontale. Sans perdre en généralité, on considère que le dispositif est en équilibre pour $\theta = 0$. Le ressort de longueur $L(t)$ est fixé en A au bâti du gravimètre et en P au fléau, de sorte que les longueurs OA et OP soient quasiment égales. Il est important de noter que le point P est le centre de masse de l'ensemble fléau plus masse d'épreuve. La masse des deux pièces est égale à m . On considère que la longueur du ressort est L_0 à l'état d'équilibre. A chaque instant, deux moments de couple sont exercés par rapport à O :

- le moment du couple \mathbf{M}_O^m dû à la masse m , donné par

$$\mathbf{M}_O^m(\theta) = -mga \cos(\theta) \quad (2.12)$$

- le moment du couple de rappel \mathbf{M}_O^r exercé par le ressort, exprimé par

$$\mathbf{M}_O^r(\theta) = k(L - L_0)OH \quad (2.13)$$

où k est la raideur de ressort et OH la hauteur du triangle isocèle AOP. Par de simples relations trigonométriques, nous obtenons

$$OH = a \sin\left(\frac{\pi/2 + \theta}{2}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \sin \theta}}$$

¹Beam

et

$$L = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2 \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)} = a\sqrt{2}\sqrt{(1 - \sin \theta)}$$

En utilisant ces deux relations, l'expression (2.13) du couple du rappel peut donc s'exprimer par

$$\mathbf{M}_O^r(\theta) = \left(1 - \frac{L_0}{a\sqrt{2}\sqrt{1 - \sin(\theta)}}\right) ka^2 \cos(\theta) \quad (2.14)$$

Le moment du couple résultant $\mathbf{M}_O(\theta)$ est formé simplement par la somme des expressions (2.12) et (2.14), soit

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O(\theta) &= \mathbf{M}_O^m(\theta) + \mathbf{M}_O^r(\theta) \\ &= \left[\left(1 - \frac{L_0}{a\sqrt{2}\sqrt{1 - \sin(\theta)}}\right) ka^2 - mga \right] \cos(\theta) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Comme θ est un petit angle, cette équation devient

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O(\theta) &\cong \underbrace{\mathbf{M}_O(\theta)\Big|_{\theta=0}}_{=0} + \underbrace{\frac{d\mathbf{M}_O(\theta)}{d\theta}\Big|_{\theta=0}}_{=-\frac{ka}{2\sqrt{2}}L_0} \theta \\ &\cong -\frac{ka}{2\sqrt{2}}L_0\theta \end{aligned} \quad (2.16)$$

Le premier terme de série vaut zéro car le système est en équilibre en $\theta = 0$. Maintenant, on écrit le théorème du moment cinétique pour le système :

$$\mathbf{I} \frac{d^2\theta}{dt^2} = \mathbf{M}_O(\theta) \quad (2.17)$$

où \mathbf{I} est le moment d'inertie du système formé par le fléau et corps d'épreuve, par rapport à O . Finalement, les deux équations (2.16) et (2.17) nous donnent une équation différentielle qui correspond à un oscillateur harmonique

$$\mathbf{I} \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{ka}{2\sqrt{2}}L_0\theta \quad (2.18)$$

qui effectue des oscillations autour de sa position d'équilibre avec une période de

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{\mathbf{I}}{\frac{ka}{2\sqrt{2}}L_0} \quad (2.19)$$

Ces deux dernières relations sont importantes car elles expriment la sensibilité du dispositif : considérons deux systèmes avec des ressorts de longueur L_{01} pour le système No. 1 et L_{02} pour le système No. 2 avec $L_{01} < L_{02}$. Alors, avec un couple constant, selon la

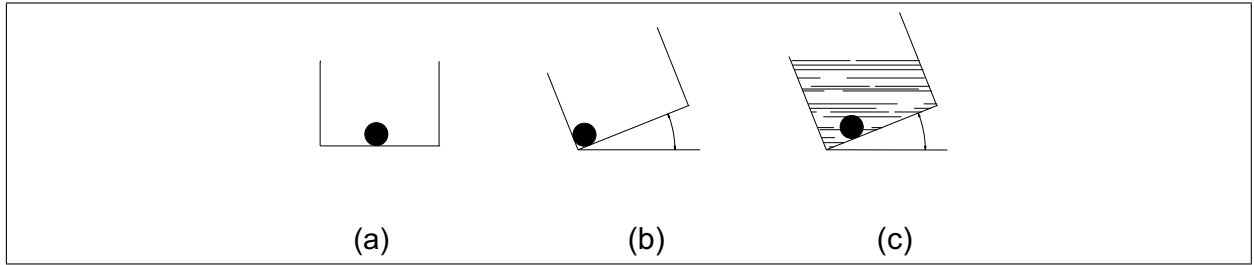


FIG. 2.4 – Le comportement du fléau du gravimètre est analogue à celui d’une sphère dans un bol à fond plat. D’après Valliant (1991).

relation (2.18), nous avons $\theta_1 > \theta_2$. Ce qui signifie que le système No. 1 est plus sensible que le système No. 2.

Raisonnons maintenant avec la relation (2.19). Avec une grande longueur du ressort ($L_0 \rightarrow \infty$), il en résulte une petite période d’oscillation, ce qui n’est pas dans l’intérêt du constructeur qui est de détecter la moindre variation du pesanteur. Au contraire, pour $L_0 \rightarrow 0$ la période d’oscillation va vers l’infini, ce qui signifie que le système réagit fortement à la moindre perturbation.

2.3.1.2 Pourquoi amortir le capteur ?

Verdun (2000) donne la réponse de cette question d’après Valliant (1991). La grande sensibilité de l’appareil rend son utilisation difficile pour des mesures dynamiques, à bord d’un véhicule en mouvement. Pour illustrer ce phénomène, Valliant (1991) considère que le comportement du fléau, dans le dispositif de LaCoste, est analogue à celui d’une sphère posée dans un bol à fond plat. D’un point de vue conceptuel, ce système est équivalent à un oscillateur de période infinie, puisque la sphère reste immobile à l’endroit même où elle a été laissée (Figure 2.4-a). Une modification infime de la pesanteur est équivalente à la rotation du bol, qui va inévitablement conduire la sphère en butée sur l’un ou l’autre des bords du bol (Figure 2.4-b). En mode statique, la mesure consiste à ramener le bol en position horizontale pour rétablir l’équilibre, et à évaluer l’angle de la rotation effectuée. Du fait de la sensibilité extrême de ce dispositif, les variations continues de la pesanteur empêchent d’effectuer la même opération en mode dynamique. Cependant, en immergeant la sphère dans un liquide très visqueux, il est possible de rendre sa position et sa vitesse mesurables (Figure 2.4-c). C’est pourquoi il est nécessaire de compléter le dispositif de base de LaCoste par un système d’amortissement. C’est le principe de base du gravimètre à ressort *sur amorti*¹, autour duquel sont bâtis les systèmes gravimétriques marins et aériens.

¹over-damped spring type gravimeter

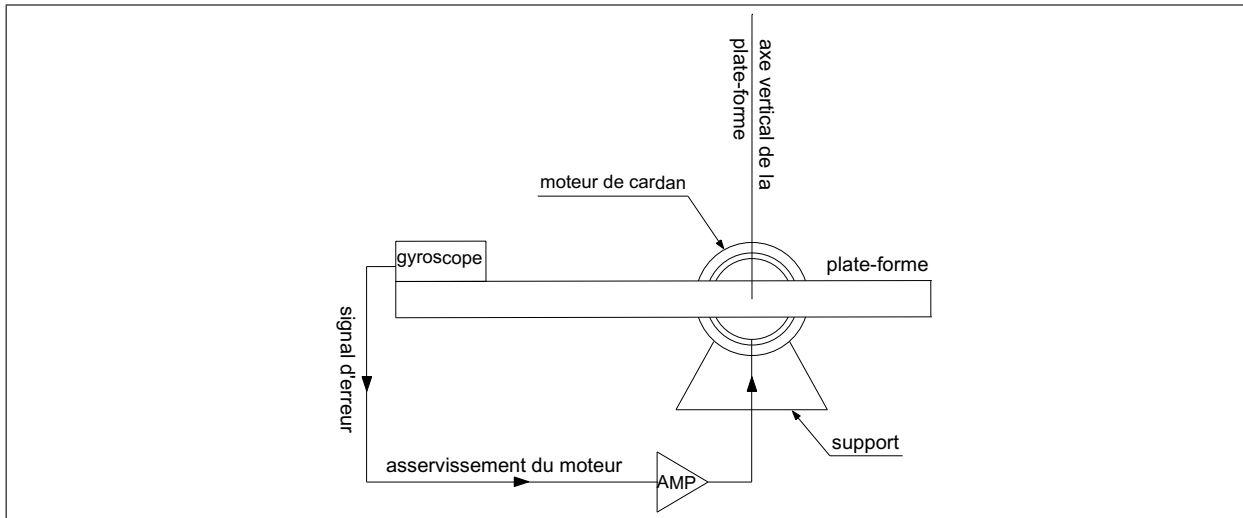


FIG. 2.5 – Une plate-forme simplifiée à un axe de liberté stabilisée par un gyroscope.

2.3.2 La Plate-forme stabilisée

2.3.2.1 Le principe

Le principe de la plate-forme stabilisée de LaCoste & Romberg est expliqué par LaCoste (1967) et LaCoste et al. (1967). La plate-forme stabilisée est contrôlée par deux moteurs appelés *moteurs de couples d'asservissement*¹ afin de maintenir la surface de la plate-forme horizontale. Ces deux moteurs produisent des rotations autour de deux axes approximativement horizontaux et mutuellement perpendiculaires. On les appelle axes de roulis et de tangage. Pour matérialiser des directions de référence, deux gyroscopes à fibre optique sont utilisés.

Comme il n'y a pas de différence entre le fonctionnement du système dans une direction ou dans l'autre, nous expliquons seulement l'opération pour un seul axe. La Figure 2.5 représente une plate-forme simplifiée à un axe de liberté stabilisée par un gyroscope. Le gyroscope est fixé sur la plate-forme. Quand cette dernière tend à quitter sa position initiale d'équilibre, le gyroscope détecte cette rotation et envoie un signal de correction au moteur, ce qui rend la surface de la plate-forme "stable" dans l'espace.

La sortie nulle du gyroscope signifie une stabilisation dans l'espace, mais elle n'assure pas l'horizontalité, pour les raisons suivantes :

- la Terre tourne,
- les surfaces équipotentielles terrestres ne sont pas "plates".

L'effet de la rotation terrestre est illustré sur la Figure 2.6. A l'instant initial, la plate-forme est positionnée à l'horizontale. Tandis que la Terre tourne, le gyroscope

¹torque motors

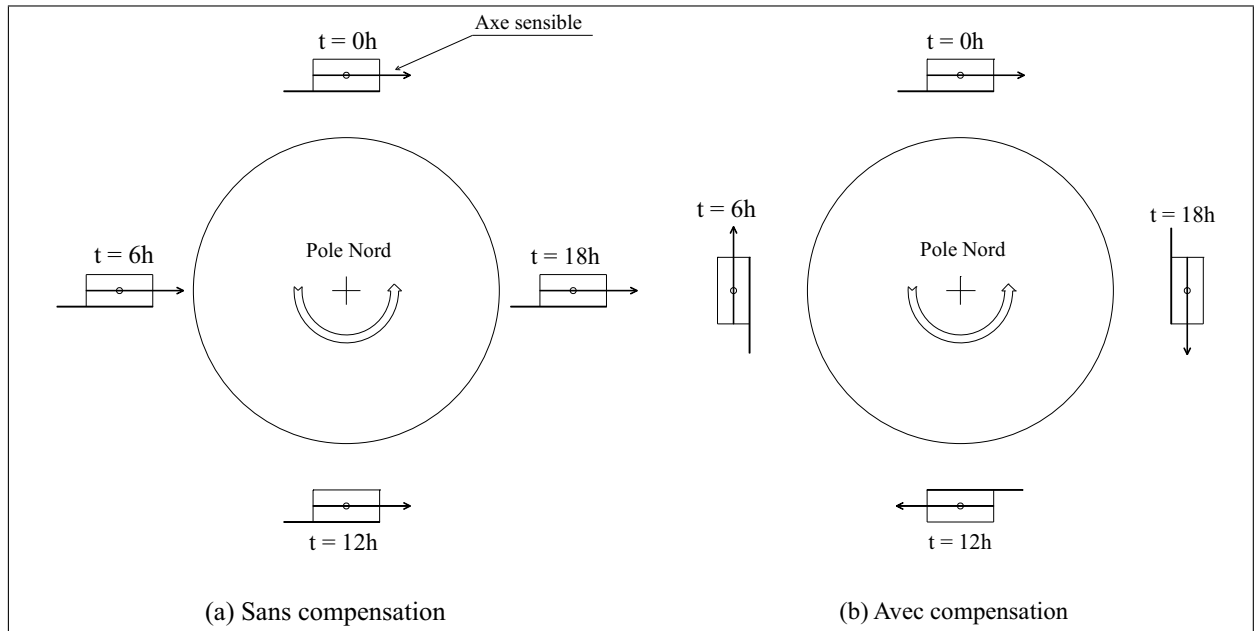


FIG. 2.6 – La Terre vue d'un point situé dans l'espace au dessus du pôle Nord. La compensation de la rotation terrestre fait tourner la plate-forme sur elle même de 360° en 24 heures.

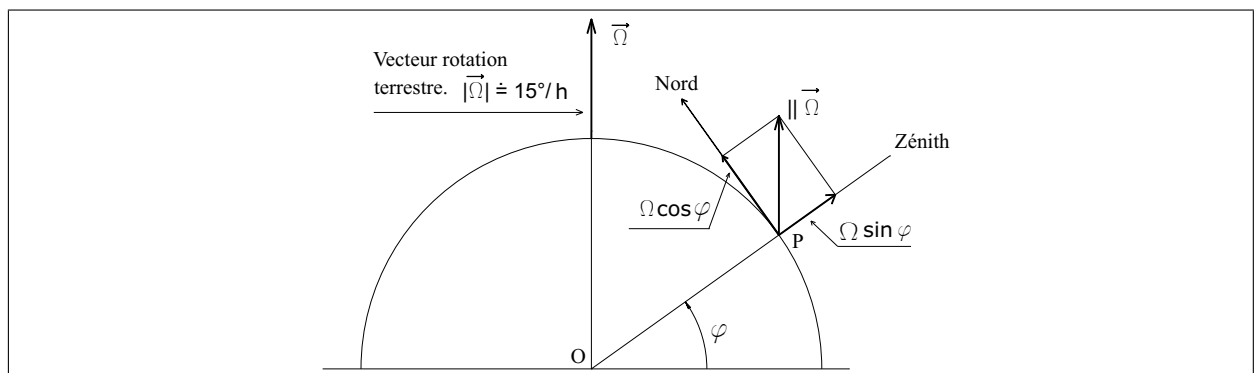


FIG. 2.7 – Decomposition du vecteur rotation terrestre en composantes horizontale et verticale.

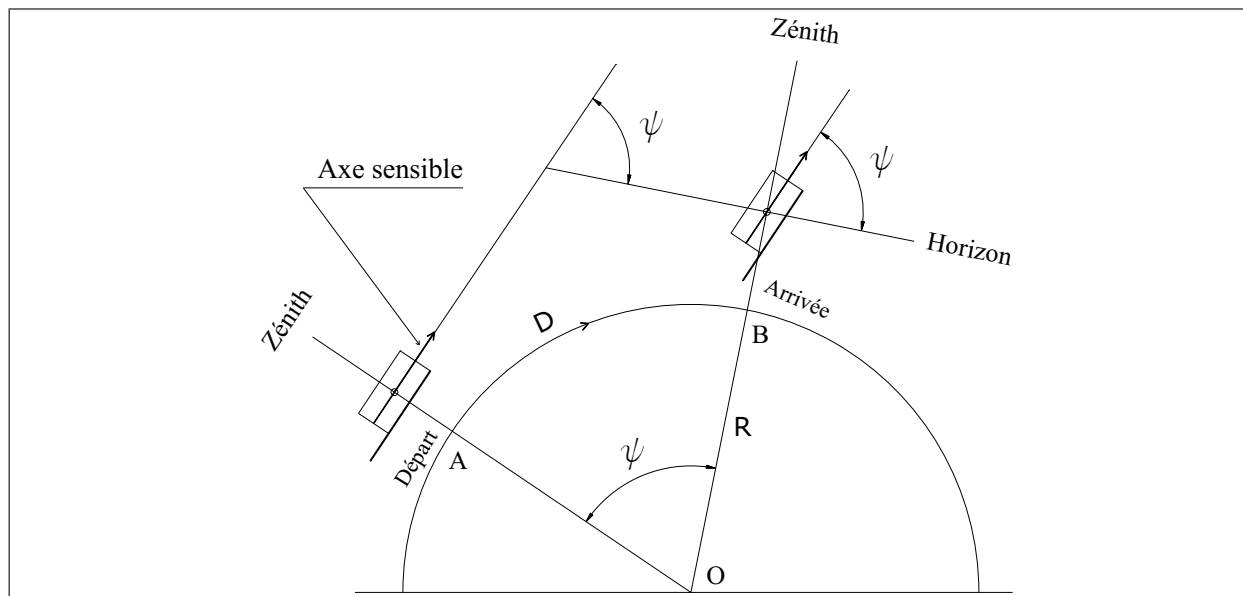


FIG. 2.8 – En allant d'un point à un autre, la plate-forme se déplace sur un arc et non sur une surface plane.

conserve son orientation fixe dans l'espace, mais quitte sa position par rapport à la Terre pour ne la retrouver que toutes les 24 heures (Figure 2.6-a). La Figure 2.6-b montre la position de la plate-forme sur laquelle a été appliquée cette rotation. Vu de l'espace, elle fait un tour complet sur elle même en 24 heures. Vu de la Terre, elle semble rester fixe et horizontale, ce qui permet le fonctionnement correct du système.

Le vecteur de la vitesse angulaire de la Terre par rapport à l'axe Nord est $\vec{\Omega}$ (Figure 2.7). Il peut être représentée en tout point sur la Terre par un vecteur parallèle à cet axe. La décomposition de ce vecteur montre :

- Une composante horizontale orientée vers le Nord et égale à $\Omega \cos \phi$, où ϕ est la latitude du point P. Ainsi, la compensation de la rotation terrestre autour de l'axe Nord-Sud de la plate-forme est maximum à l'équateur ($\simeq 15^\circ/h$) et nulle au pôle.
- Une composante verticale orientée vers le Zénith et égale à $\Omega \sin \phi$. Pour une plate-forme à deux axes, cette compensation n'a pas de sens.
- Il ne comporte pas de composante Ouest-Est. Ceci veut dire que pour une plate-forme à deux axes, il n'y a pas de compensation autour de cette axe due à la rotation terrestre.

L'effet de la courbure des surfaces équipotentielles terrestre est montré sur la Figure 2.8. En allant d'un point à un autre, la plate-forme se déplace sur un arc et non sur une surface plane. Etant donné que la plate-forme sans compensation conserve son orientation dans l'espace, elle semble tourner par rapport à la surface de la Terre entre le départ et l'arrivée (Figure 2.8). La compensation doit donc faire tourner la plate-forme de

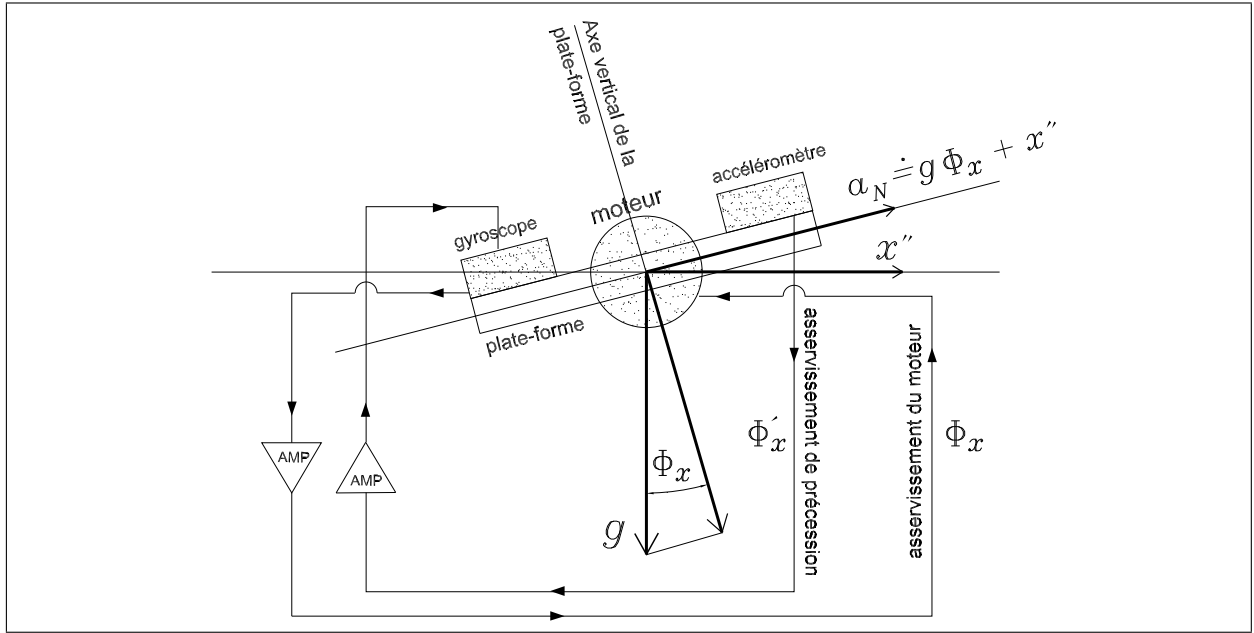


FIG. 2.9 – Deux accéléromètres horizontaux et deux gyroscopes sont utilisés pour aligner l'axe vertical de la plate-forme avec la direction de la pesanteur. Ceci est fait en deux étapes : (I) l'écart angulaire Φ_x est mesuré par le gyroscope. L'axe vertical de la plate-forme est aligné avec l'axe de référence du gyroscope par une première boucle d'asservissement, (II) une correction Φ'_x basée sur la mesure de l'accéléromètre est appliquée *sur le gyroscope* par une deuxième boucle d'asservissement pour corriger sa direction de référence.

telle manière qu'elle conserve en permanence la même orientation par rapport à la surface de la Terre. La vitesse angulaire ν de la plate-forme due à cette compensation est

$$\nu = \frac{V}{R} \quad (2.20)$$

où V est la vitesse linéaire de la plate-forme et R est le rayon de la Terre.

2.3.2.2 Compensation par des mesures accélérométriques

Pour corriger les effets de la rotation et de la courbure terrestre, il faut modifier continuellement la référence gyroscopique en imprimant un mouvement de précession à l'axe du gyroscope. Ces corrections sont effectuées à partir des mesures accélérométriques. Deux accéléromètres horizontaux, dans deux directions perpendiculaires, sont fixés sur la plate-forme et envoient des signaux aux gyroscopes pour corriger ces axes. Ainsi, pour chaque moteur, il y a deux boucles d'asservissement (Figure 2.9). Par la première boucle, comme nous avons vu, la sortie du gyroscope est amplifiée et envoyée au moteur pour rendre la sortie du gyroscope égale à zéro. Par une deuxième boucle une correction issue des mesures accélérométriques est envoyée vers le gyroscope pour rendre sa direction parallèle à la surface terrestre.

Soit Φ_x l'angle entre la plate-forme et la surface horizontale. Comme Φ_x est petit, la sortie de l'accéléromètre est

$$a_N \doteq g\Phi_x + x'' \quad (2.21)$$

soit

$$a_N/g \doteq \Phi_x + x''/g$$

où

- a_N accélération horizontale mesurée par l'accéléromètre, N indiquant la direction Nord,
- g accélération de gravité,
- x'' accélération linéaire de la plate-forme, obtenue par GPS.

La valeur de la modification de Φ_x (la dérivée de Φ_x dans le langage mathématique), peut être une simple fonction de la sortie de l'accéléromètre, soit

$$\Phi'_x = k(\Phi_x + x''/g) \quad (2.22)$$

où k est une constante. LaCoste (1967) constate qu'une plate-forme gérée par (2.22) ne représente pas une bonne plate-forme. En revanche, une fonction Φ'_x donnée par

$$\Phi'_x = -2f_0\omega_0(\Phi_x + x''/g) - \omega_0^2 \int (\Phi_x + x''/g)dt \quad (2.23)$$

corrige les effets de la rotation terrestre par le biais du terme intégral. Dans cette équation, f_0 et ω_0 sont des coefficients qui peuvent être ajustés à volonté. Il est évident que les accélérations cinématiques horizontales sont une source d'erreur pour la stabilisation et nous y reviendrons plus tard.

L'équation (2.23) est l'équation du mouvement de la plate-forme, qui correspond de fait à celui d'un pendule amorti, car en dérivant nous avons

$$\Phi''_x + 2f_0\omega_0\Phi'_x + \omega_0^2\Phi_x = -2f_0\omega_0x'''/g - \omega_0^2x''/g \quad (2.24)$$

où f_0 est le facteur d'amortissement et ω_0 détermine la période naturelle d'oscillation T_0 du système ($T_0 = 2\pi/\omega_0$). Pour la plate-forme de LaCoste cette période est variable à volonté, mais en général elle est fixée autour de 4 minutes.

On note qu'avec une petite modification, l'équation (2.23), prend en compte l'effet de la courbure terrestre. D'après la Figure 2.8,

$$\frac{1}{R} \int x''dt$$

est équivalent à ν en (2.20). Alors (2.23) devient

$$\Phi'_x = -2f_0\omega_0(\Phi_x + \frac{1}{R} \iint x''dt^2 + x''/g) - \omega_0^2 \int [\Phi_x + \frac{1}{R} \iint x''dt^2 + x''/g]dt \quad (2.25)$$

LaCoste (1967) constate qu'une plate-forme correspondante à cette équation, est indépendante des accélérations horizontales si sa période d'oscillation est 84 minutes. Cette période s'appelle *période de Schuler* et la plate-forme s'appelle également *plate-forme de Schuler*. Il existe plusieurs difficultés lors de la mise en opération de cette plate-forme, par exemple : 'sa période est très longue', et pour arriver à cette période d'excellents gyroscopes et accéléromètres sont nécessaires.

2.3.2.3 Limite d'exigence pour le nivellement de la plate-forme

L'imperfection de la stabilisation à deux impacts sur la mesure de la gravité :

- Le capteur de gravité devient moins sensible dans la direction verticale
- Il devient sensible aux accélérations horizontales

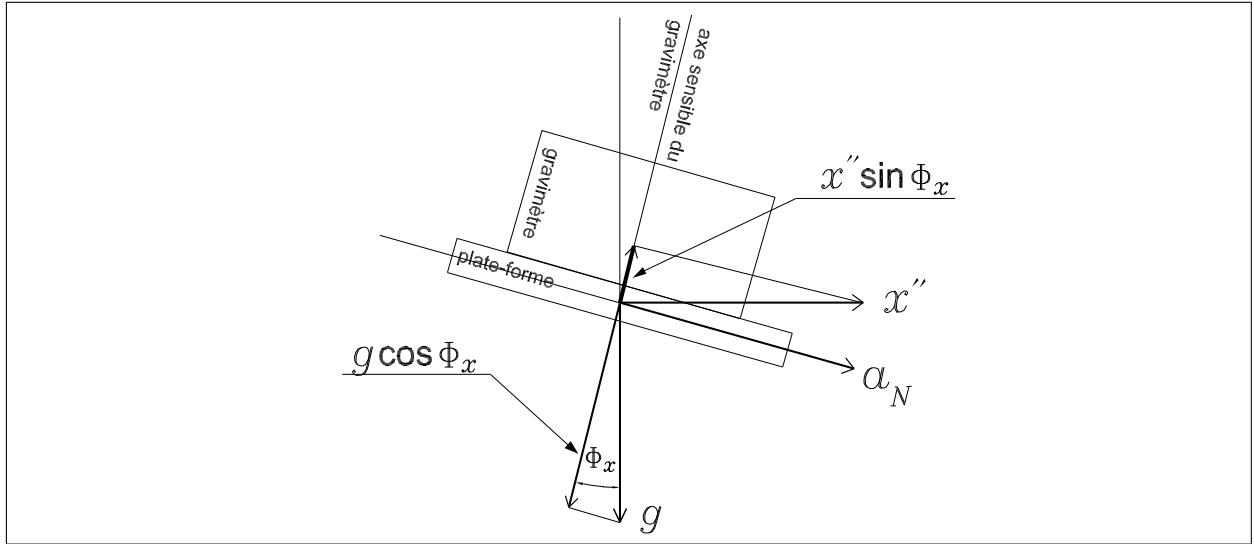


FIG. 2.10 – Erreur sur la gravité due à l'inclinaison de la plate-forme

On peut constater, à partir de la Fig. 2.10, que l'erreur sur la gravité (e_g) due à un défaut de stabilisation est

$$\begin{aligned} e_g &= g \cos \Phi_x - x'' \sin \Phi_x - g \\ &\doteq -x'' \Phi_x - g \Phi_x^2 / 2 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Ici les paramètres sont les mêmes que pour l'équation (2.25).

Le terme $g \Phi_x^2 / 2$ correspond à l'erreur aléatoire due à la stabilisation du gravimètre en état statique ($x'' = 0$). Pour une erreur inférieure à $1mGal$ pour l'état statique, il faut que le gravimètre soit nivelé à $\Phi_x \leq 5'$. Le problème à ce niveau est d'estimer un intervalle de tolérance pour Φ_x dans le cas dynamique, garantissant une erreur inférieure à une valeur donnée, par exemple $1mGal$. LaCoste (1967) considère un modèle sinusoïdal

pour x'' avec une amplitude de $0.05g \approx 50000mGal$ et obtient un modèle sinusoïdal pour Φ_x avec une amplitude de $8''$ d'arc quand il est en phase avec x'' . Pour la gravimétrie marine, il constate que cette précision est réalisable. Verdun (2000) obtient $\Phi_x = 2''$ pour une x'' de $0.1g \approx 1m/s^2$ d'amplitude, ce qui est vraisemblable en gravimétrie aéroportée. Selon LaCoste&Romberg (1998), la précision de $1mGal$ est réalisable avec le gravimètre 'Air/Sea model S' en présence d'une accélération horizontale de $0.1g$ si de bons gyroscopes sont utilisés.

2.3.3 Correction sur la gravité mesurée due à l'imperfection du nivellement

Cette erreur, donnée par l'expression (2.26) est aussi appelée *erreur due aux accélérations horizontales*. Elle est analysée par LaCoste (1967), Valliant (1991) et Olesen (2002), et chacun de ces auteurs propose des modèles.

2.3.3.1 Modèle proposé par LaCoste (1967)

Il considère un modèle sinusoïdal pour x'' avec une période T et obtient une erreur moyenne pour e_g qui est de la forme

$$\overline{e_g} = \frac{(\frac{T}{T_0})^4}{(\frac{T}{T_0})^4 + 1} \overline{\left(\frac{|x''|^2}{2g}\right)} \quad (2.27)$$

où T_0 est la période naturelle de la plate-forme. Avec ce modèle pour une plate-forme d'une période $4\ min$, une accélération horizontale d'une période $35\ sec$ et d'une amplitude $0.1g$ provoque une erreur sur la gravité qui est de moins d' $1\ mGal$. Ceci indique que dans les conditions normales de vol¹ cette erreur est négligeable. Par contre elle augmente pour les accélérations horizontales de longue période (Figure 2.11).

A partir de l'analyse spectrale sur des données réelles, Verdun (2000) constate que la puissance spectrale des accélérations horizontales, dans les deux directions longitudinale et transversale, se situe majoritairement entre $67\ sec$ et $100\ sec$. Ainsi, en analysant la Figure 2.11, on constate que le modèle de LaCoste reste peu sûr pour la gravimétrie aéroportée.

2.3.3.2 Modèles proposés par Valliant (1991)

Une transformée de Fourier, appliquée à l'équation (2.24), donne la fonction de transfert du système correspondant [LaCoste (1967), p. 493] :

$$G(s) = -\frac{2if_0\omega_0s + \omega_0^2}{-s^2 + 2if_0\omega_0s + \omega_0^2} \quad (2.28)$$

¹ou pour la gravimétrie marine

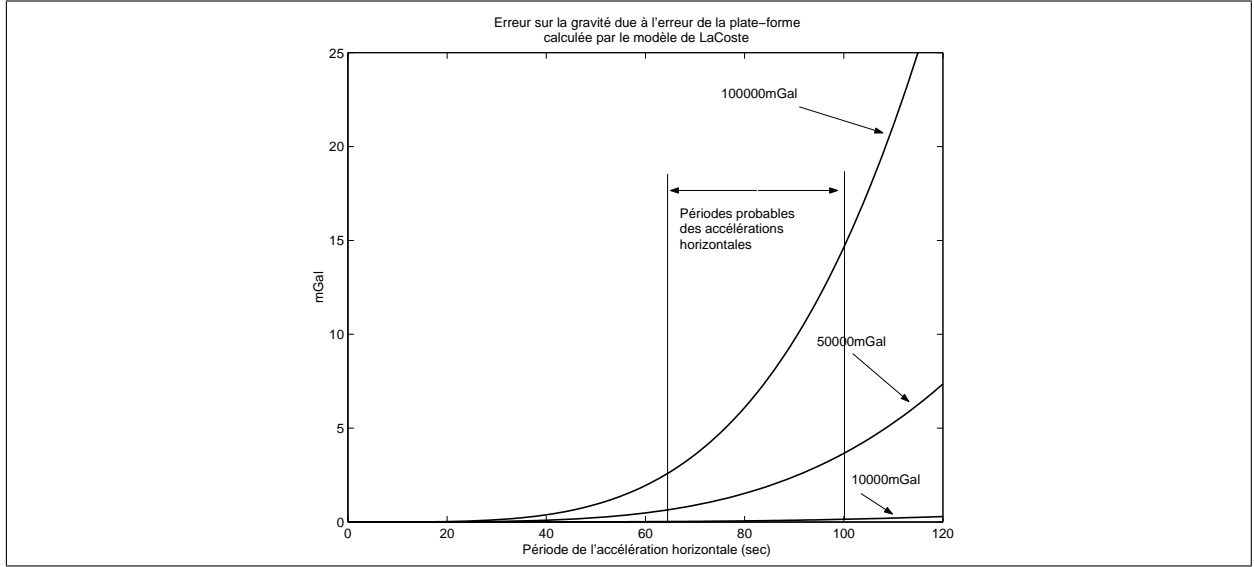


FIG. 2.11 – L'erreur sur la gravité, due à l'imperfection du nivellement de la plate-forme, est une fonction de la longueur d'onde et du carré de l'amplitude des accélérations horizontales.

où s est la fréquence et i l'unité sur l'axe imaginaire. L'entrée du système est x''/g et sa sortie Φ_x . La fonction de transmissibilité correspondante est montrée par la Figure 2.12 pour $T_0 = 4 \text{ min}$. Cette fonction présente un filtre passe bas pour lequel les entrées haute fréquences seront filtrées. Autrement dit, la variation des angles d'inclinaison de la plate-forme est à basse fréquence : une conclusion qui est logique évidemment.

Valliant (1991) propose d'évaluer les accélérations horizontales (issues du GPS, ou de manière plus approchée, issues des accéléromètres horizontales) par ce filtre. Le résultat est Φ_x qu'on introduit ensuite dans (2.26) pour calculer e_g .

Il propose également un modèle de correction, basé sur la différence entre les accélérations horizontales réelles (obtenue par GPS) et mesurées par les accéléromètres. Ce modèle est de la forme

$$\begin{aligned}
 g &= g_m + \frac{A^2 - A_{GPS}^2}{2g} \\
 &= g_m + \frac{(a_N^2 + a_E^2) - (x''^2 + y''^2)}{2g}
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

où :

- g gravité corrigée,
- g_m gravité mesurée,
- a_N accélération horizontale longitudinale mesurée par l'accéléromètre,
- a_E accélération horizontale transversale mesurée par l'accéléromètre,

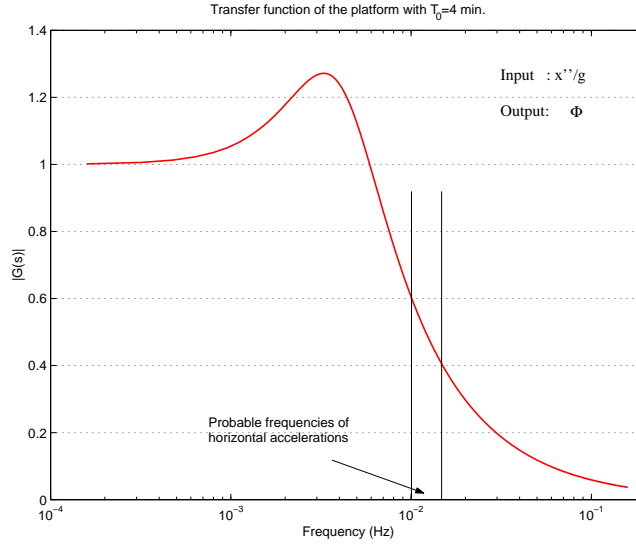


FIG. 2.12 – La fonction de transfert de la plate-forme stabilisée de LaCoste&Romberg.

x'' accélération horizontale dans la direction Nord obtenue par GPS,
 y'' accélération horizontale dans la direction Est obtenue par GPS,

Pour obtenir cette équation, Valliant (1991) considère que a_Z , accélération verticale de l'avion, est quasiment égale à g , et en plus que $g \gg x''$ et $g \gg y''$.

2.3.3.3 Modèle proposé par Olesen (2002)

L'avantage de l'équation (2.29) est qu'elle présente la correction de l'inclinaison de la plate-forme simplement comme fonction des accélérations horizontales réelles et mesurées. Le problème est que ce modèle donne une petite différence, $A^2 - A_{GPS}^2$, entre deux chiffres potentiellement très grands. A^2 et A_{GPS}^2 sont calculés à partir de données discrètes et très bruitées. Olesen et al. (2002) avance qu'un modèle du type (2.29) peut imposer des biais de l'ordre de $20mGal$ sur la détermination de la gravité.

Olesen (2002) propose une autre procédure basée sur l'équation (2.21) présentée sous la forme

$$\Phi_x \doteq \frac{a_N - x''}{g} \quad (2.30)$$

Il donne le lien théorique entre a_N et x'' par le biais d'une fonction de transfert obtenue à partir de la fonction de transfert de la plate-forme (2.28). Présentée sur la Figure 2.13 et avec les mêmes paramètres que (2.28),

$$H(s) = -\frac{s^2}{-s^2 + 2if_0\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (2.31)$$

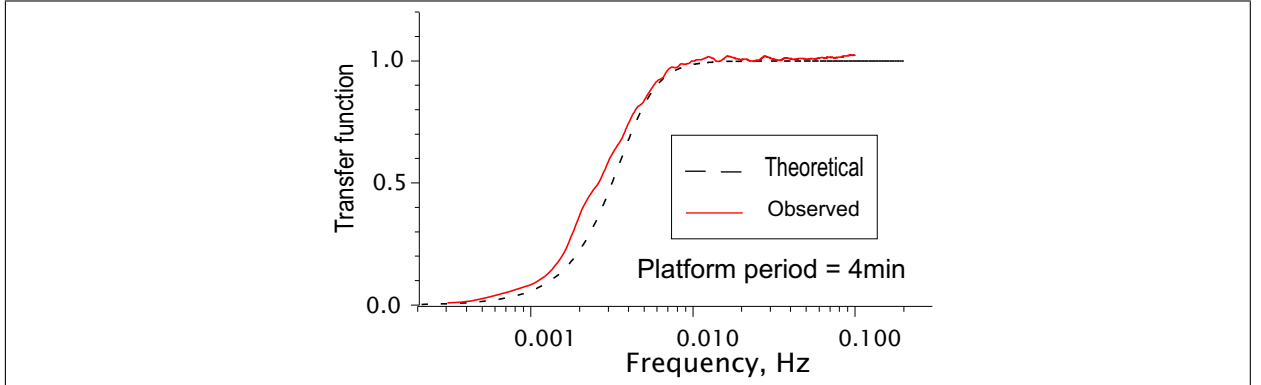


FIG. 2.13 – La fonction de transfert de la plate-forme stabilisée de LaCoste&Romberg. L'entrée du système est l'accélération horizontale de l'avion dans une direction et sa sortie est le signal haute fréquence resenti par l'accéléromètre horizontal dans la même direction. D'après Olesen (2002).

est la fonction de transfert d'un système qui filtre des longues périodes (basses fréquences) de son entrée x'' , pour ne retenir qu'une accélération haute fréquence a_N^* , qui est ressentie par l'accéléromètre horizontal. Ce filtrage se fait par la relation

$$a_N^* = \text{IFT}[H(s)] * x'' \quad (2.32)$$

où $\text{IFT}[\cdot]$ est la transformé de Fourier inverse et $*$ est l'opérateur de convolution.

On calcule maintenant un $\tilde{\Phi}_x$ qui ne contient pas les composantes spectrales hautes fréquences supérieurs à 0.01Hz (obtenu à partir de la Figure 2.13) avec la relation

$$\tilde{\Phi}_x = \frac{a_N^* - x''}{g} \quad (2.33)$$

La relation finale pour la correction de l'inclinaison de la plate-forme donnée par Olesen (2002) est

$$e_g = (1 - \cos \tilde{\Phi}_x \cos \tilde{\Phi}_y) g_m + (\sin \tilde{\Phi}_x) x'' + (\cos \tilde{\Phi}_x \sin \tilde{\Phi}_y) y'' \quad (2.34)$$

Ici $\tilde{\Phi}_y$ est l'inclinaison transversale de la plate-forme calculée par (2.33) en mettant a_E^* et y'' au lieu de a_N^* et x'' respectivement. Les autres paramètres ont été définis précédemment.

L'avantage de ce modèle est qu'il ne contient pas de terme carré, donc la nature des bruits ne sera pas changée. Par exemple un bruit blanc se propage en tant que bruit blanc à travers la relation (2.34). Un autre avantage de cette approche est qu'on peut vérifier la qualité du fonctionnement de la plate-forme en mettant a_N mesuré au lieu de a_N^* en (2.32) et en considérant $H(s)$ comme inconnu. Pour un système qui fonctionne correctement, la fonction de tranfert observée doit être de la même forme que celle utilisée en théorie. Un exemple est illustré sur la Figure 2.13 d'après Olesen (2002).

MODÈLE MATHÉMATIQUE DU FONCTIONNEMENT DU GRAVIMÈTRE

3.1 Référentiels utilisés en gravimétrie mobile

Soit $\vec{\mathbf{F}}$ le vecteur de la somme des forces appliquées sur une masse m , située au point P . La deuxième loi de Newton, écrite par définition dans un système de référence inertiel C , est

$$\vec{\mathbf{F}} = m \vec{\mathbf{\Gamma}}_{P/C} \quad (3.1)$$

où $\vec{\mathbf{\Gamma}}_{P/C}$ est l'accélération de la masse dans le repère C due à $\vec{\mathbf{F}}$.

La force $\vec{\mathbf{F}}$ exercée, peut s'écrire comme la somme de deux termes

$$\vec{\mathbf{F}} = m \vec{\mathbf{G}} + \vec{\mathbf{F}}_{ng} \quad (3.2)$$

soit

$$\vec{\mathbf{\Gamma}}_{P/C} = \vec{\mathbf{G}} + \vec{\mathbf{F}}_{ng}/m \quad (3.3)$$

où $\vec{\mathbf{G}}$ est le vecteur de la gravitation et $\vec{\mathbf{F}}_{ng}$ est l'ensemble des forces non gravitationnelles.

En gravimétrie mobile, grâce à la connaissance de $\vec{\mathbf{\Gamma}}_{P/C}$, le vecteur $\vec{\mathbf{G}}$ est déterminé si $\vec{\mathbf{F}}_{ng}$ est connue. L'Equation (3.3) constitue l'*équation fondamentale de la gravimétrie mobile*.

Un problème additionnel vient du fait que les mesures accélérométriques sont faites dans un repère qui n'est pas inertiel (Figure 3.1). L'Equation (3.3) doit être modifiée pour qu'elle soit valable dans les systèmes non-inertiels.

On distingue six systèmes de référence employés en gravimétrie mobile :

1. Le référentiel de Copernic (C)
2. Le référentiel géocentrique fixé par rapport aux étoiles (IN)

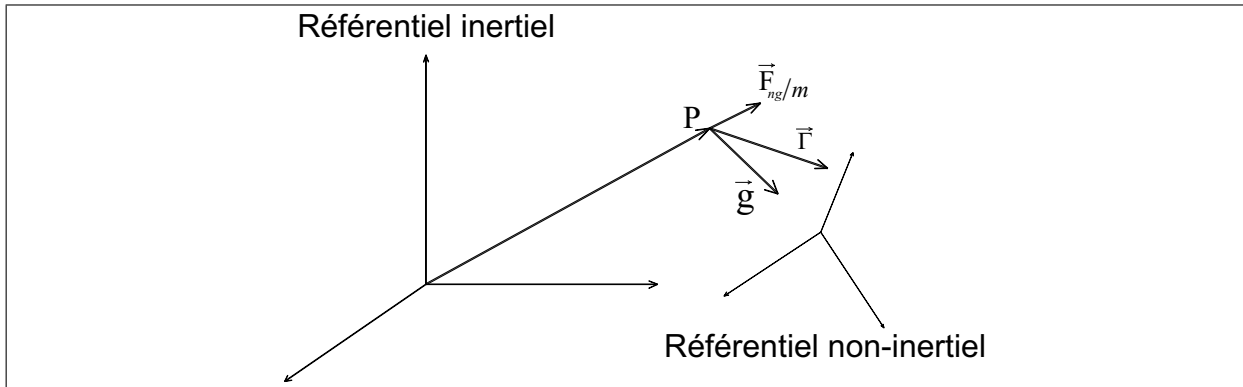


FIG. 3.1 – Les mesures accélérométriques et la représentation du vecteur de la gravité sont faites dans un repère non-inertiel.

3. Le référentiel géocentrique moyen tournant avec la Terre (CT)¹
4. Le référentiel local géodésique défini par l'ellipsoïde de référence (LG)
5. Le référentiel du gravimètre (GR)
6. Le référentiel de mesure (M)

La Figure 3.2 représente l'ensemble de ces référentiels. La définition de chacun est donnée ci-après.

1. Le référentiel de Copernic (C) est le meilleur référentiel inertiel identifiable expérimentalement.

Origine centre de masse du Système Solaire,
 Axe Z perpendiculaire au plan Ecliptique,
 Axe X vers l'équinoxe vernal γ ,
 Axe Y tel que les axes X, Y et Z forment un trièdre direct.

2. Le référentiel IN est le meilleur repère inertiel géocentrique. Il est en translation par rapport au référentiel de Copernic.

Origine centre de masse de la Terre,
 Axe Z l'axe de rotation de la Terre,
 Axe X vers l'équinoxe vernal γ ,
 Axe Y tel que les axes X, Y et Z forment un trièdre direct.

3. Le référentiel CT est un système de référence géocentrique fixe par rapport à la Terre. Il tourne avec la vitesse de la rotation terrestre autour du repère IN.

Origine centre de masse de la Terre,

¹Conventional Terrestrial System

Axe Z l'axe de rotation de la Terre,
 Axe X l'intersection du plan équatorial et du plan contenant le méridien de Greenwich,
 Axe Y tel que les axes X, Y et Z forment un trièdre direct.

4. Le référentiel local géodésique LG est défini par l'ellipsoïde de référence géocentrique. Il est le représentant mathématique du référentiel local astronomique (LA) [Vaníček et Krakiwsky (1986)]. L'axe Z de ce dernier est suivant la direction de la verticale du lieu, perpendiculaire à la surface équipotentielle locale. Idéalement, on devrait employer le système LA, mais on l'approxime localement par le référentiel LG. En remplaçant le repère LA par le repère LG, on commet une erreur e sur la mesure de gravité qui est fonction de l'angle de déflexion de la verticale ε . Cette fonction est $e(\varepsilon) = g - g \cos \varepsilon$. Pour $\varepsilon = 30''$, cette erreur est de l'ordre de $10\mu Gal$, et donc négligable pour la gravimétrie aéroportée.

Le référentiel local géodésique est défini comme :

Origine centre de phase de l'une des antennes GPS sur l'avion,
 Axe Z vers la direction opposée à la normale à l'ellipsoïde depuis l'origine du repère,
 Axe X vers le Nord géodésique,
 Axe Y tel que les axes X, Y et Z forment un trièdre direct.

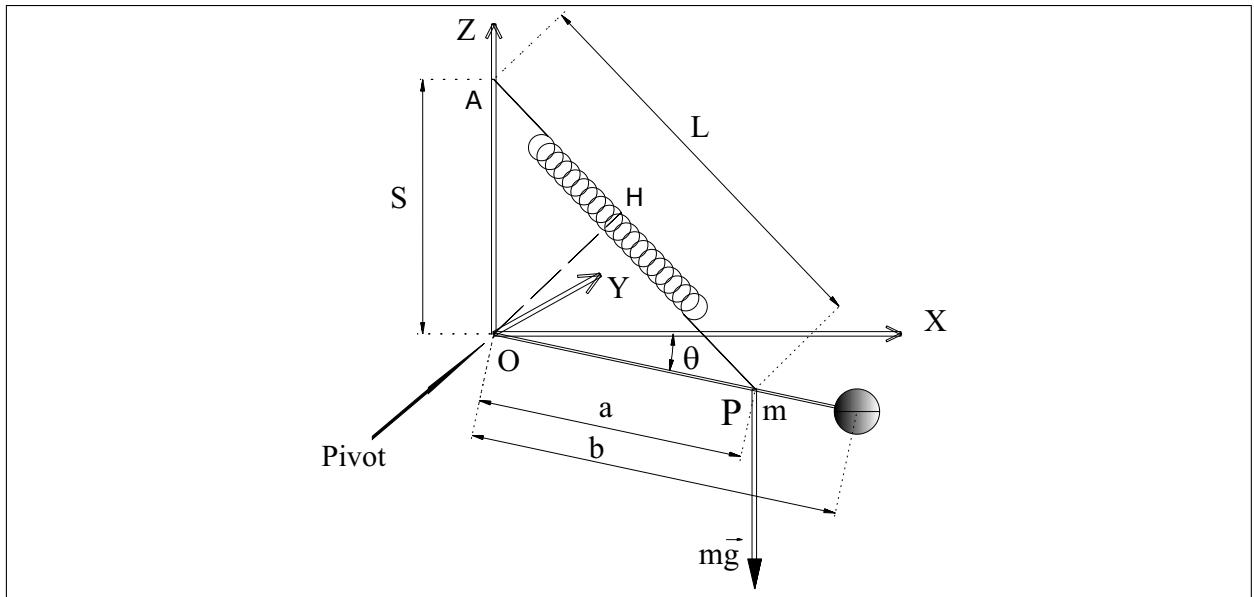


FIG. 3.3 – Référentiel de mesure M lié au gravimètre.

5. Le référentiel du gravimètre GR est défini par le boîtier du gravimètre rigidement fixé à l'avion. Il peut prendre une orientation quelconque dans l'espace. Il est important de noter que le centre de ce système ne coïncide pas avec le centre du capteur du gravimètre.

Origine le coin du boîtier de gravimètre,
 Axe Z vers le haut,
 Axe X en général dans la direction de vol, en fonction de l'installation du gravimètre dans l'avion,
 Axe Y tel que les axes X, Y et Z forment un trièdre direct.

6. Le référentiel de mesure M est représenté par la Figure 3.3. Il est défini par le capteur du gravimètre. Pour un gravimètre stabilisé du type LaCoste & Romberg, le plan XY de ce référentiel coïncide avec celui du repère local géodétique LG ($Z^M \parallel Z^{LG}$), donné par la table nivelée du gravimètre (aux erreurs de nivellement près). Par contre, les directions des axes X et Y du repère M , ne coïncident pas avec celles du repère LG, car la plate-forme utilisée est une plate-forme à deux axes (elle n'est pas capable de tourner autour de l'axe vertical). Une plate-forme à trois axes pourrait s'orienter entièrement vers les directions géodésiques locales.

Origine le centre du gravimètre (point O sur la Figure 3.3),
 Axe Z la direction de la verticale du lieu (dans le cas idéal),
 Axe X vers le côté où se trouve la masse d'épreuve du gravimètre,
 Axe Y tel que les axes X, Y et Z forment un trièdre direct.

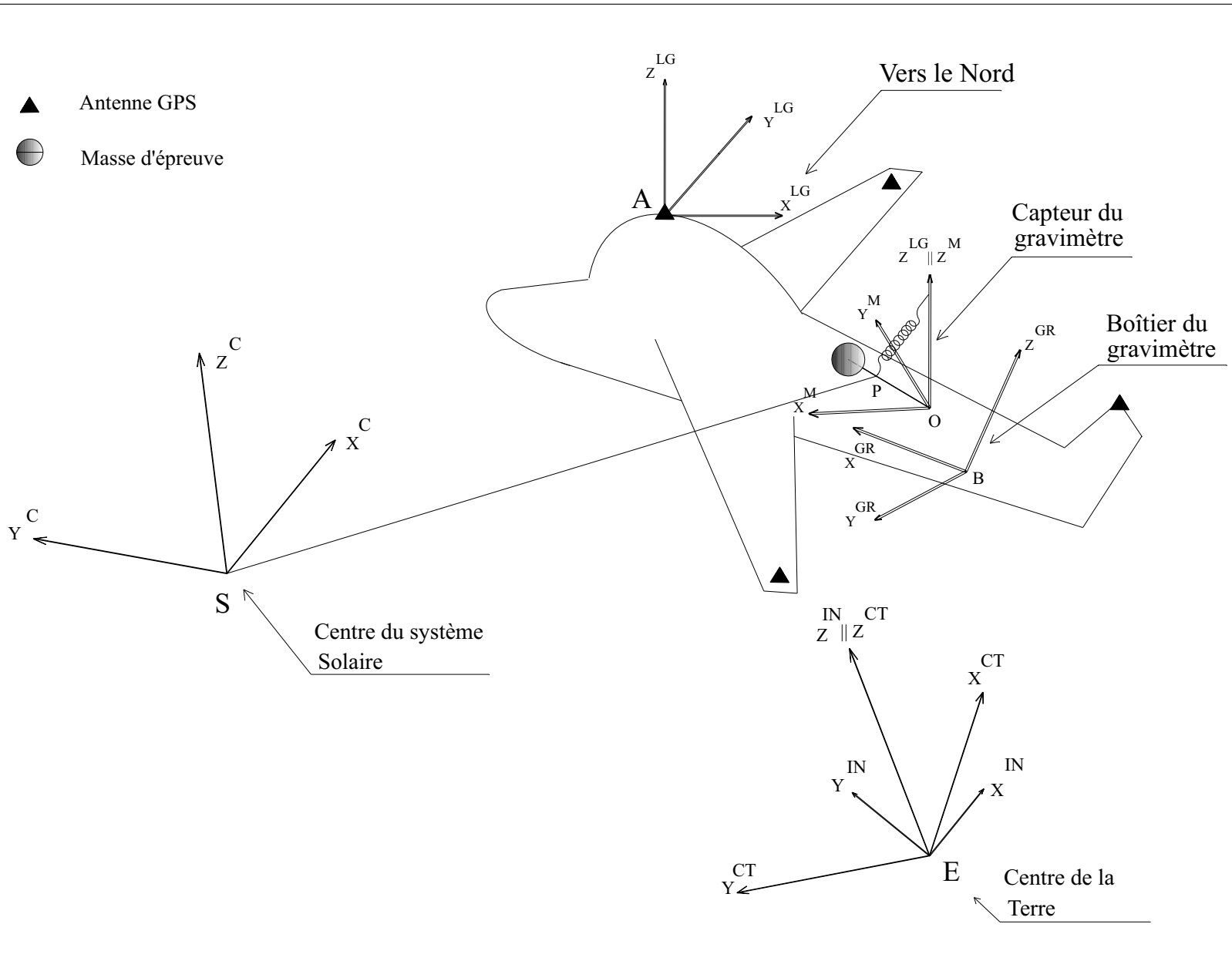


FIG. 3.2 – Les différents référentiels employés en gravimétrie mobile

3.2 Vitesse et accélération dans le repère de mesure

A l'aide des référentiels définis en Section 3.1 et en utilisant les relations du changement de repère (Annexe A), nous sommes en mesure d'obtenir une équation d'observation générale pour les mesures gravimétriques.

On se repère grâce à la Figure (3.2) sur laquelle tous les repères sont illustrés. Les mesures gravimétriques sont effectuées dans le repère **M**. Pour écrire la deuxième loi de Newton, valable dans le repère **C**, on fait des changements de repère consécutifs :

$$\mathbf{C} \implies \mathbf{IN} \implies \mathbf{CT} \implies \mathbf{LG} \implies \mathbf{GR} \implies \mathbf{M}$$

3.2.1 Relation pour les vitesses

En utilisant la notation de l'Annexe A, nous avons

$$\vec{\mathbf{V}}_{P/C} = \vec{\mathbf{V}}_{P/IN} + \vec{\mathbf{V}}_{P,IN/C} \quad (3.4)$$

On rappelle que :

- P centre de la masse de l'ensemble du fléau et la masse d'épreuve du gravimètre,
- $\vec{\mathbf{V}}_{P/C}$ vitesse de P dans le repère **C**,
- $\vec{\mathbf{V}}_{P/IN}$ vitesse de P dans le repère **IN**,
- $\vec{\mathbf{V}}_{P,IN/C}$ vitesse de P due au mouvement du repère **IN** par rapport au repère **C**

Une relation similaire existe pour le passage du repère **IN** au repère **CT** :

$$\vec{\mathbf{V}}_{P/IN} = \vec{\mathbf{V}}_{P/CT} + \vec{\mathbf{V}}_{P,CT/IN} \quad (3.5)$$

avec des notations similaires à celles de l'équation précédente. On obtient in fine

$$\underbrace{\vec{\mathbf{V}}_{P/C}}_{(1)} = \underbrace{\vec{\mathbf{V}}_{P/M}}_{(2)} + \underbrace{\vec{\mathbf{V}}_{P,M/GR}}_{(3)} + \underbrace{\vec{\mathbf{V}}_{P,GR/LG}}_{(4)} + \underbrace{\vec{\mathbf{V}}_{P,LG/CT}}_{(5)} + \underbrace{\vec{\mathbf{V}}_{P,CT/IN}}_{(6)} + \underbrace{\vec{\mathbf{V}}_{P,IN/C}}_{(7)} \quad (3.6)$$

Regardons alors chaque terme de (3.6) de plus près :

- (1) ier terme : défini par l'Equation (3.4).
- (2) ième terme : vitesse du point P dans le repère **M**.
- (3) ième terme :

$$\vec{\mathbf{V}}_{P,M/GR} = \vec{\mathbf{V}}_{O/GR} + \vec{\omega}_{M/GR}^M \times \overrightarrow{OP}^M \quad (3.7)$$

où \overrightarrow{OP}^M signifie que les coordonnées du vecteur \overrightarrow{OP} sont données dans le repère M, et $\overrightarrow{\omega}_{M/GR}^M$ est le vecteur de rotation de M par rapport à GR, représenté dans le repère M (indice supérieur).

• (4) ième terme :

$$\overrightarrow{V}_{P,GR/LG} = \overrightarrow{V}_{B/LG} + \overrightarrow{\omega}_{GR/LG}^{GR} \times \overrightarrow{BP}^{GR} \quad (3.8)$$

On rappelle que le point B est le centre du repère du gravimètre. Les petites déformations de l'avion au niveau de son toit (les variations de la distance entre l'antenne GPS principale, le point A , et le gravimètre) sont négligeables. Donc

$$\overrightarrow{V}_{B/LG} = \overrightarrow{0}$$

ce qui transforme (3.8) en

$$\overrightarrow{V}_{P,GR/LG} = \overrightarrow{\omega}_{GR/LG}^{GR} \times \overrightarrow{BP}^{GR} \quad (3.9)$$

• (5) ième terme :

$$\overrightarrow{V}_{P,LG/CT} = \overrightarrow{V}_{A/CT} + \overrightarrow{\omega}_{LG/CT}^{LG} \times \overrightarrow{AP}^{LG} \quad (3.10)$$

• (6) ième terme :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V}_{P,CT/IN} &= \overrightarrow{\omega}_{CT/IN}^{CT} \times \overrightarrow{EP}^{CT} \\ &= \overrightarrow{\Omega}^{CT} \times \overrightarrow{EP}^{CT} \end{aligned} \quad (3.11)$$

où $\overrightarrow{\Omega}^{CT}$ est le vecteur de rotation terrestre, avec ces coordonnées en repère CT.

• (7) ième terme :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V}_{P,IN/C} &= \overrightarrow{V}_{E/C} + \underbrace{\overrightarrow{\omega}_{IN/C}^{IN}}_{=\overrightarrow{0}} \times \overrightarrow{EP}^{IN} \\ &= \overrightarrow{V}_{E/C} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Cette équation est valable quand on néglige la précession et la nutation de l'axe de rotation terrestre dans l'espace.

3.2.2 Relation pour les accélérations

Nous allons présenter à présent la dérivée de l'Equation (3.6), par rapport au temps, dans le référentiel de Copernic C.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{P/C} \right)_C &= \left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{P/M} \right)_C + \left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{P,M/GR} \right)_C + \left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{P,GR/LG} \right)_C \\ &+ \left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{P,LG/CT} \right)_C + \left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{P,CT/IN} \right)_C + \left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{P,IN/C} \right)_C \end{aligned} \quad (3.13)$$

Comme la dérivation mathématique de cette expression est longue, le développement complet est donné en Annexe B. Le résultat abrégé est :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_{P/C} &= \vec{\Gamma}_{E/C} \\ &+ \vec{\Omega}^{CT} \times (\vec{\Omega}^{CT} \times \vec{EP}^{CT}) \\ &+ \vec{\Gamma}_{A/CT} + 2\vec{\Omega}^{CT} \times \vec{V}_{A/CT} \\ &+ \vec{\Gamma}_1(\vec{AB}^{LG}) \\ &+ \vec{\Gamma}_2 \left(\frac{d^2 \vec{BO}^{GR}}{dt^2}, \frac{d\vec{BO}^{GR}}{dt}, \vec{BO}^{GR} \right) \\ &+ \vec{\Gamma}_3 \left(\frac{d^2 \vec{OP}^M}{dt^2}, \frac{d\vec{OP}^M}{dt}, \vec{OP}^M \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

avec :

- $\vec{\Gamma}_{P/C}$ accélération du point P dans le repère de Copernic,
- $\vec{\Gamma}_{E/C}$ accélération du centre de la Terre dans le repère de Copernic,
- $\vec{\Omega}^{CT}$ vecteur de rotation terrestre dans le repère géocentrique CT
- $\vec{\Gamma}_{A/CT}$ accélération de l'antenne GPS dans le repère CT,
- $\vec{V}_{A/CT}$ vitesse de l'antenne GPS dans le repère CT,
- $\vec{\Gamma}_1$ accélération dépendante du *bras de levier* (vecteur \vec{AB} entre l'antenne GPS et le gravimètre)
- $\vec{\Gamma}_2$ accélération différentielle gravimètre/plate-forme
- $\vec{\Gamma}_3$ accélération du capteur gravimétrique/gravimètre

Les expressions des trois fonctions $\vec{\Gamma}_1$, $\vec{\Gamma}_2$ et $\vec{\Gamma}_3$ sont aussi données en Annexe B.

3.3 Equation du capteur gravimétrique LaCoste & Romberg

3.3.1 Application de la deuxième loi de Newton

L'Equation (3.14) est l'expression générale de l'accélération du centre de masse du capteur gravimétrique (fléau + masse d'épreuve). Pour pouvoir appliquer la deuxième loi de Newton (3.1) dans le repère \mathbf{M} où les mesures sont effectuées, nous devons connaître les forces exercées sur ce point. Ces forces sont :

- $m\vec{\mathbf{G}}$ Force gravitationnelle due à la Terre,
- $m\vec{\mathbf{\Gamma}}_{\text{LS},P}$ Force gravitationnelle due à la Lune et au soleil au point P ,
- $m\vec{\mathbf{\Gamma}}_r$ Forces de rappel exercée par le ressort,
- $m\vec{\mathbf{\Gamma}}_f$ Force de frottement générée par le dispositif d'amortissement.

On rappelle que m est la masse du fléau plus la masse d'épreuve. En appliquant la deuxième loi de Newton et en utilisant (3.14) il vient :

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathbf{G}} + \vec{\mathbf{\Gamma}}_{\text{LS},P} + \vec{\mathbf{\Gamma}}_r + \vec{\mathbf{\Gamma}}_f &= \vec{\mathbf{\Gamma}}_{P/C} \\
 &= \vec{\mathbf{\Gamma}}_{E/C} + \vec{\mathbf{\Omega}}^{\text{CT}} \times (\vec{\mathbf{\Omega}}^{\text{CT}} \times \vec{EP}^{\text{CT}}) \\
 &\quad + \vec{\mathbf{\Gamma}}_{A/\text{CT}} + 2\vec{\mathbf{\Omega}}^{\text{CT}} \times \vec{\mathbf{V}}_{A/\text{CT}} \\
 &\quad + \vec{\mathbf{\Gamma}}_1 + \vec{\mathbf{\Gamma}}_2 + \vec{\mathbf{\Gamma}}_3
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

On définit la *pesanteur*¹ $\vec{\mathbf{g}}$ comme la somme de l'*accélération gravitationnelle* et de l'*accélération centrifuge* $\vec{\mathbf{\Gamma}}_{\text{cent.},P}$ donnée par

$$\vec{\mathbf{\Gamma}}_{\text{cent.},P} = -\vec{\mathbf{\Omega}}^{\text{CT}} \times (\vec{\mathbf{\Omega}}^{\text{CT}} \times \vec{EP}^{\text{CT}}) \tag{3.16}$$

soit

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathbf{g}} &= \vec{\mathbf{G}} + \vec{\mathbf{\Gamma}}_{\text{cent.},P} \\
 &= \vec{\mathbf{G}} - \vec{\mathbf{\Omega}}^{\text{CT}} \times (\vec{\mathbf{\Omega}}^{\text{CT}} \times \vec{EP}^{\text{CT}})
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Le terme

$$\delta \vec{\mathbf{\Gamma}}_{\text{LS},P} = \vec{\mathbf{\Gamma}}_{\text{LS},P} - \vec{\mathbf{\Gamma}}_{E/C} \tag{3.18}$$

est appelé quelquefois *accélération génératrice des marées*. Nous avons employé le signe δ car cette accélération a une nature différentielle, en d'autres termes $\delta \vec{\mathbf{\Gamma}}_{\text{LS},P}$ est l'accélération luni-solaire différentielle entre les points P sur la surface de la Terre et E au centre de la Terre.

¹"gravity" en Anglais

En remplaçant (3.17) et (3.18) en (3.15) et en réarrangeant les termes :

$$(\vec{g} - \vec{C}) + \vec{\Gamma}_r + \vec{\Gamma}_f = \vec{\Gamma}_3 \quad (3.19)$$

avec :

$$\vec{C} = \vec{\Gamma}_{A/CT} + 2\vec{\Omega}^{CT} \times \vec{V}_{A/CT} - \delta \vec{\Gamma}_{LS,P} + \vec{\Gamma}_1 + \vec{\Gamma}_2 \quad (3.20)$$

L'accélération \vec{C} est une *accélération parasite* liée au mouvement de l'avion. La somme de la pesanteur et de l'accélération parasite est appelé *pesanteur apparente*. Les trois forces $m(\vec{g} - \vec{C})$, $m\vec{\Gamma}_r$ et $m\vec{\Gamma}_f$ créent l'accélération $\vec{\Gamma}_3$ du point P dans le repère du capteur du gravimètre.

L'Equation (3.19) est une équation vectorielle dans laquelle les mesures gravimétriques n'apparaissent pas. Pour obtenir l'équation du fonctionnement du gravimètre, nous exprimons cette équation selon la théorème du moment cinétique :

$$\vec{M}_O^{(g-C)} + \vec{M}_O^r + \vec{M}_O^f = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (3.21)$$

avec :

- $\vec{M}_O^{(g-C)}$ moment du couple appliqué par la force $m(\vec{g} - \vec{C})$ par rapport au point O ,
- \vec{M}_O^r moment du couple de rappel par rapport au point O ,
- \vec{M}_O^f moment du couple de frottement généré par le dispositif d'amortissement,
- \vec{L} moment cinétique angulaire du système par rapport au point O .

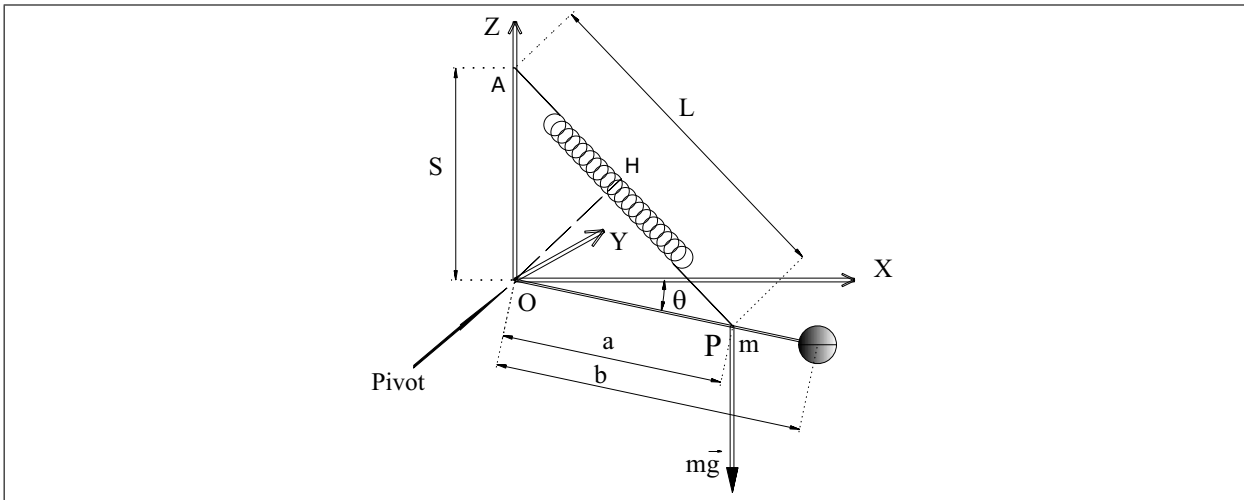


FIG. 3.4 – Capteur gravimétrique LaCoste & Romberg et référentiel correspondant.

3.3.2 Equation différentielle du mouvement du fléau

On considère encore une fois la figure qui représente le capteur gravimétrique LaCoste & Romberg (Figure 3.4), et on exprime les vecteurs des moments dans le repère défini par ce capteur, en faisant attention aux signes des composantes des vecteurs. Par définition le vecteur $\vec{M}_O^{(g-C)}$ est

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_O^{(g-C)} &= \vec{OP} \times m(\vec{g} - \vec{C}) \\
 &= \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ 0 \\ a \sin \theta \end{pmatrix} \times m \begin{pmatrix} -C_h \\ 0 \\ -g - C_v \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -maC_h \sin \theta + ma(g + C_v) \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\simeq \begin{pmatrix} 0 \\ -maC_h \theta + ma(g + C_v) \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

avec :

C_h accélération parasite dans la direction horizontale,
 C_v accélération parasite dans la direction verticale,
 g grandeur du vecteur de pesanteur.

Pour la dernière expression on a considéré que θ est un petit angle.

Le couple de rappel exercé par le ressort \vec{M}_O^r est

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_O^r &= \vec{OP} \times \vec{F}^r \\
 &= \vec{OP} \times k(L - L_0) \frac{\vec{AP}}{\|\vec{AP}\|} \\
 &= \frac{k(L - L_0)}{L} \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ 0 \\ a \sin \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \cos \theta \\ 0 \\ S - a \sin \theta \end{pmatrix} \\
 &= k \left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{S^2 + a^2 - 2Sa \sin \theta}} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ -Sa \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

avec :

\vec{F}^r force de rappel exercée par le ressort,
 k raideur du ressort,
 L_0 longueur initiale du ressort,

L longueur actuelle du ressort.

En considérant que $S \simeq a$, et pour θ petit, on peut écrire¹ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{S^2 + a^2 - 2Sa \sin \theta}} &\simeq \frac{1}{\sqrt{2a}\sqrt{1 - \sin \theta}} \\ &\simeq \frac{1}{\sqrt{2a}} \left(1 + \frac{\theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

En remplaçant (3.24) en (3.23) on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbb{M}}_O^r &\simeq \begin{pmatrix} 0 \\ -kSa \left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{2a}} \left(1 + \frac{\theta}{2}\right)\right) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\simeq \begin{pmatrix} 0 \\ -kSa \left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{2a}}\right) + \frac{kSL_0}{\sqrt{2}} \frac{\theta}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Le dispositif d'amortissement du système est modélisé par une force de frottement visqueux. Le moment du couple de frottement s'écrit donc

$$\begin{aligned} \vec{\mathbb{M}}_O^f &= \vec{OP} \times \vec{F}^f \\ &= \vec{OP} \times \left[-mf \left(\frac{d\vec{OP}}{dt} \right) \right] \\ &= -mf \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ 0 \\ a \sin \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \\ 0 \\ a \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ mfa^2 \frac{d\theta}{dt} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.26)$$

ici \vec{F}^f est la force de frottement, et f est le coefficient de frottement.

¹Nous avons utilisé le développement

$$(1 \pm x)^{-m} = 1 \mp mx + \frac{m(m+1)}{2} x^2 + \dots, \quad (m \in \mathbb{R}, |x| < 1)$$

Finalement, le moment cinétique angulaire du système est défini par

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{L}} &= -I \frac{d\theta}{dt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -ma^2 \frac{d\theta}{dt} \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (3.27)$$

On remplace (3.22), (3.25), (3.26) et (3.27) en (3.21) et, après réarrangement, on obtient la relation suivante

$$a \frac{d^2\theta}{dt^2} + fa \frac{d\theta}{dt} + \underbrace{\left(\frac{kSL_0}{2\sqrt{2}ma} - C_h \right)}_{\simeq \frac{kL_0}{2\sqrt{2}m}} \theta = \frac{k}{m} \left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{2}a} \right) S - (g + C_v) \quad (3.28)$$

En notant $B = a\theta$, on obtient une équation différentielle de deuxième ordre qui régit l'évolution temporelle de $B(t)$

$$\frac{d^2B}{dt^2} + 2\lambda\omega \frac{dB}{dt} + \omega^2(1 - \varepsilon C_h)B = KS - (g + C_v) \quad (3.29)$$

avec :

$$\begin{aligned}2\lambda\omega &= f \\ \omega^2 &= \frac{kL_0}{2\sqrt{2}ma} \\ \varepsilon &= \frac{2\sqrt{2}m}{kL_0} \\ K &= \frac{k}{m} \left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{2}a} \right)\end{aligned}$$

Ces coefficients sont tous constants. Cette équation différentielle a été donnée pour la première fois par LaCoste (1967), p. 501. A cause des accélérations horizontales de l'avion, dans les gravimètres à fléau, il existe un effet dit de "couplage", qui apparaît dans l'Equation (3.29) comme

$$CC(t) = \omega^2 \varepsilon C_h(t) B(t) \quad (3.30)$$

Il s'appelle en Anglais "Cross-coupling effect", car il couple le mouvement vertical du fléau avec l'accélération horizontale de l'avion. Selon LaCoste (1967) il peut atteindre dans certaines conditions jusqu'à 49 *mGal*. Dans le gravimètre LaCoste & Romberg modèle Air/Sea, il existe un système qui mesure l'effet de couplage en utilisant les mesures accélérométriques effectuées par les accéléromètres de la plate-forme, et il fournit d'ailleurs l'une des sorties de l'appareil, dite valeur $CC(t)$ à chaque instant. Les autres observables de ce gravimètre sont la tension du ressort $S(t)$ et la position du fléau $B(t)$. Comme il s'agit

d'un gravimètre relatif, nous devons connaître la gravité absolue g_{ref} à l'aéroport. De plus, avant chaque ligne de vol, on doit mesurer la tension du ressort initial S_0 à l'aéroport, au même point où la gravité de référence est mesurée. Ainsi, l'équation du mouvement du fléau pour chaque ligne de vol devient

$$\frac{d^2 B}{dt^2} + 2\lambda\omega \frac{dB}{dt} + \omega^2 B(t) = g_{ref} + K(S(t) - S_0) + CC(t) - (g(t) + C_v(t)) \quad (3.31)$$

3.3.3 Equation simplifiée du mouvement du fléau

L'Equation (3.31) peut être simplifiée, en considérant que certains de ses termes sont beaucoup plus petits que d'autres. Comme le gravimètre LaCoste & Romberg est un gravimètre "à ressort de longueur nulle" (cf. Section 2.3.1), ω^2 est très proche de zéro. De plus, comme le coefficient d'amortissement f du système est grand, on vérifie à chaque instant que $\ddot{B} \ll 2\lambda\omega \dot{B}$. Ainsi, l'Equation (3.31) peut s'écrire comme

$$2\lambda\omega \frac{dB}{dt} = g_{ref} + K(S(t) - S_0) + CC(t) - (g(t) + C_v(t))$$

ou

$$g(t) = g_{ref} + K(S(t) - S_0) + CC(t) - 2\lambda\omega \frac{dB}{dt} - C_v(t) \quad (3.32)$$

Les gravimètres LaCoste & Romberg modèle Air/Sea mettent à la disposition des utilisateurs, en temps réel, la quantité $\tilde{g}(t) = g(t) + C_v(t)$ qui est calculée par l'Equation (3.32). Cette quantité est préalablement filtrée par un filtre passe-bas, employé dans le système gravimétrique.

3.3.4 Accélérations parasites dues aux mouvements de l'avion

On rappelle l'expression de l'accélération parasite \vec{C} définie par l'Equation (3.20) :

$$\vec{C} = \vec{\Gamma}_{A/CT} + 2\vec{\Omega}^{CT} \times \vec{V}_{A/CT} - \delta \vec{\Gamma}_{LS,P} + \vec{\Gamma}_1 + \vec{\Gamma}_2 \quad (3.33)$$

Le système gravimétrique LaCoste & Romberg est un système de gravimétrie scalaire. Nous nous intéressons donc seulement à la composante verticale du vecteur \vec{C} . Il faut quand même ajouter que la composante horizontale de ce vecteur entre dans la modélisation du gravimètre par le biais du terme "Cross-Coupling" $CC(t)$ défini par (3.30). Mais, comme nous avons utilisé les valeurs mesurées de CC dans l'Equation (3.31), nous ne développerons pas l'expression de la composante horizontale de \vec{C} .

Analysons chaque terme de l'Equation (3.33) :

- La composante verticale du vecteur $\vec{\Gamma}_{A/CT} + 2\vec{\Omega}^{CT} \times \vec{V}_{A/CT}$ est égale à la somme de deux accélérations nommées *accélération verticale* a_v et *accélération d'Eötvös* $a_{Eöt}$ (cf.

Annexe C) avec les expressions suivantes :

$$a_v(t) = \frac{d^2 h(t)}{dt^2} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} a_{E\ddot{o}t}(t) = & -\left(M(\varphi(t)) + h(t)\right) \left(\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)^2 \\ & -\left(N(\varphi(t)) + h(t)\right) \left(2\Omega_T + \frac{d\lambda(t)}{dt}\right) \cos^2(\varphi(t)) \left(\frac{d\lambda(t)}{dt}\right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

avec :

- (φ, λ, h) coordonnées du centre de phase de l'antenne GPS,
- $M(\varphi)$ rayon de courbure méridien de l'ellipsoïde de référence,
- $N(\varphi)$ rayon de courbure normal de l'ellipsoïde de référence,
- Ω_T vitesse angulaire de la rotation terrestre.

- L'accélération de marées $\delta \vec{\Gamma}_{LS,P}$, qui est une accélération modélisable, n'excède pas en général, 0.2 mGal , et est donc négligeable pour la gravimétrie aéroportée.

- On rappelle l'expression (B.30) qui est l'expression de l'accélération $\vec{\Gamma}_1$ dépendante du bras de levier (le vecteur entre l'antenne GPS et le gravimètre) :

$$\vec{\Gamma}_1 = \dot{\vec{\omega}}_{LG/CT}^{LG} \times \overrightarrow{AB}^{LG} + \left(\vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} + 2\vec{\Omega}^{CT}\right) \times \left(\vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} \times \overrightarrow{AB}^{LG}\right) \quad (3.36)$$

Elle peut être modélisée si les informations d'attitude de l'avion sont disponibles (à partir d'un système inertiel ou d'un GPS multi-antennes). De même, nous avons besoin de savoir la localisation relative du gravimètre par rapport à l'antenne GPS, qu'il faut introduire par des mesures géodésiques (angles, distances, ...). Verdun (2000) fait une simulation de la trajectoire de l'avion, avec des valeurs correspondantes à des conditions défavorables, et obtient la valeur de 5 mGal pour cette accélération qu'il appelle "effet de délocalisation". Selon lui, en présence de l'accélération verticale qui est souvent de l'ordre de quelques milliers de milligals, cette accélération n'a pas un impact important sur la gravité finale obtenue. Selon Olesen (2002), avec une longueur de 7.2 m pour le bras de levier, durant un campagne de mesures sur la Corse, l'accélération du bras de levier n'a pas dépassé pas le seuil de 1.6 mGal avec un RMS de 0.4 mGal . Nous négligerons donc cette accélération pour nos calculs.

- L'accélération différentielle gravimètre/plate-forme $\vec{\Gamma}_2$, qu'on appelle sa composante verticale a_T^1 , dépend du fonctionnement du système de la plate-forme et du système d'amortissement (coussins d'air, amortisseurs, etc). La modélisation mathématique d'un tel système est extrêmement compliquée. Nous avons utilisé une technique de modélisation simplifiée par une fonction de transfert de la plate-forme pour les accélérations verticales (cf. Section 4.4).

Ainsi, la forme finale de l'équation différentielle du mouvement du fléau (3.31) est

¹accélération due à la table

$$\frac{d^2B}{dt^2} + 2\lambda\omega \frac{dB}{dt} + \omega^2 B(t) = g_{ref} + K(S(t) - S_0) + CC(t) - (g(t) + a_v(t) - a_T(t) + a_{E\ddot{o}t}(t)) \quad (3.37)$$

Cette équation est une modélisation améliorée (par la présence du terme $a_T(t)$) du système gravimétrique LaCoste & Romberg qui prend en compte explicitement l'accélération générée par le fonctionnement de la plate-forme stabilisée et le système d'amortissement employé pour absorber les vibrations dues au mouvement de l'avion.

MODÉLISATION DE LA GRAVITÉ À PARTIR DE MESURES AÉROGRAVIMÉTRIQUES

Les mesures aérogravimétriques effectuées avec un gravimètre de type LaCoste & Romberg sont :

- **Les mesures GPS.** On les appelle aussi données de *trajectographie*. Ces mesures sont constituées par les coordonnées géodésiques des points de mesure le long des profils.
- **Les mesures gravimétriques** elles-mêmes :
 - La tension du ressort S
 - La position du fléau B
 - L'effet du couplage transverse¹ CC
- **Les mesures accélérométriques** si on utilise en même temps un système INS.
- **Les mesures altimétriques** effectuées par des altimètres lasers. Les mesures altimétriques servent au calcul de l'accélération verticale de l'avion, mais leur exactitude est très limitée par la précision des modèles numériques de terrain (MNT).

Ces mesures sont toutes sous la forme de séries temporelles. Le lien entre ces séries est l'équation différentielle du mouvement du fléau (3.37) :

$$\frac{d^2 B}{dt^2} + \alpha \frac{dB}{dt} + \beta B(t) = F(t), \quad t \in [t_a, t_b] \quad (4.1)$$

où

$$F(t) = g_{ref} + K(S(t) - S_0) + CC(t) - (g(t) + a_v(t) - a_T(t) + a_{E\ddot{o}t}(t)) \quad (4.2)$$

avec

¹cross-coupling effect

t_a	temps de la première mesure sur une ligne de vol,
t_b	temps de la dernière mesure sur une ligne de vol,
S_0	tension du ressort à l'aéroport pour chaque ligne de vol,
α, β et K	constantes instrumentales.

Les termes $a_v(t)$, $a_T(t)$ et $a_{Eöt}(t)$ sont calculés à partir des mesures GPS et les autres termes à partir des mesures gravimétriques. Le seul terme inconnu est donc $g(t)$. Une première idée est alors de calculer chaque terme séparément, puis de calculer le terme inconnu comme la somme des termes. Mais cette méthode n'est pas une solution acceptable car, comme nous allons voir,

- l'analyse spectrale nous montre que le contenu spectral de chaque terme est différent de celui des autres termes. Comme l'accélération de gravité est un signal avec un contenu spectral basse fréquence, la somme des autres termes doit aussi être dans la même zone de fréquence. A défaut, un filtrage passe bas des termes est nécessaire.
- Le calcul de certains termes demande une différentiation numérique. L'opérateur de différentiation est non borné et par conséquent fait augmenter le niveau des bruits existants sur les séries temporelles. Sachant que les bruits sont en général de nature haute fréquence, un filtrage passe bas est encore une fois nécessaire.

Avant de nous pencher sur les méthodes de modélisation du champs de gravité, nous allons évoquer en premier le pré-traitement de ces données.

4.1 Pré-traitement des données aérogravimétriques

4.1.1 Vérification pour des lacunes et des erreurs grossières

Une lacune, ou trou, peut apparaître pour tout type de mesures continues. Une coupure du signal, un défaut momentané de l'appareil, une instabilité des mesures, etc. peut être l'origine d'une lacune dans les données. La méthode la plus simple pour identifier les lacunes est de tracer les séries temporelles. Le pas d'échantillonnage est choisi constant sur l'ensemble des séries (1 seconde en général). Toute lacune pose un sérieux problème pour les calculs, car elle change la série temporelle régulière, en une série qui n'est plus échantillonnée à pas constant¹. Faire des calculs numériques (différentiation, intégration, filtrage, interpolation, analyse spectrale, ...) sur ce type tronqué de séries est parfois délicat. Si l'interruption des données est courte, une simple interpolation peut être suffisante. On peut aussi, si la lacune est située au milieu de la série temporelle, considérer la série comme deux séries séparées.

Les erreurs grossières sur les mesures GPS sont traitées en Section 2.1. Sur les mesures gravimétriques, ces erreurs sont les plus probables lors des manœuvres de l'avion pour changer la ligne d'acquisition. En milieux des lignes, l'élimination des erreurs grossières, induit le phénomène de lacunes dans les séries de données.

¹un-evenly spaced time series

4.1.2 Synchronisation des mesures

Tous les termes de l'Equation (4.1) sont des fonctions du temps. Pour qu'on puisse considérer tous les termes dans la même équation, il faut qu'ils soient synchronisés. Autrement dit, les mesures de trajectographie GPS et les mesures gravimétriques, doivent correspondre au même point. Le gravimètre possède son propre temps, synchronisé avec l'horloge de l'ordinateur du système gravimétrique, alors que le temps du GPS est un temps atomique extrêmement précis donnée par les satellites.

La différence entre ces deux temps est une constante plus une dérive temporelle. Avec un ordre de grandeur pessimiste pour la dérive temporelle des instrument actuels, Verdun (2000) obtient la valeur de 20 *ms* pour l'effet cumulé de cette dérive pendant 2 *h* d'acquisition. L'intervalle de temps de 20 *ms* correspond à 2*m* de distance lors d'un vol à 100 *m/s*. Le maximum du gradient horizontal de la gravité observé à l'altitude de vol est de 0,022 *mGal/m*. Une erreur de 2*m* en position du gravimètre due à la dérive de l'horloge, correspond alors à une erreur maximum de 0,04 *mGal*, ce qui est tout à fait négligeable.

Contrairement à la dérive temporelle, le biais en temps peut atteindre plusieurs secondes. Il faut donc une méthode efficace pour corriger cette erreur. Selon Olesen (2002), l'efficacité d'une méthode de synchronisation se mesure au fait qu'elle corrige le décalage à moins de 100 *ms*. La methode utilisée est la synchronisation par les fonctions dite de "cross-correlation".

Considérons une série temporelle non périodique et sa réplique décalée en temps. La corrélation entre ces deux séries temporelles est de 100% quand il n'y a pas de décalage entre deux séries identiques. La corrélation diminue quand on décale une série par rapport à l'autre. Ce principe est à la clé de la méthode de synchronisation par les fonctions de "cross-correlation".

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux séries temporelles stationnaires. La fonction d'autocorrelation de $x(t)$ est définie par

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[x(t_1)x(t_2)] \quad (4.3)$$

avec \mathbb{E} l'espérance mathématique. Comme $x(t)$ est une série stationnaire, R_{xx} ne dépend que de $\tau = t_2 - t_1$, ce qui transforme (4.3) en

$$R_{xx}(\tau) = \mathbb{E}[x(t)x(t + \tau)] \quad (4.4)$$

R_{xx} atteint son maximum en $\tau = 0$. On défini la fonction de "cross-correlation" entre $x(t)$ et $y(t)$ comme

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[x(t_1)y(t_2)] \quad (4.5)$$

qui se transforme à son tour en

$$R_{xy}(\tau) = \mathbb{E}[x(t)y(t + \tau)] \quad (4.6)$$

Supposons maintenant que x et y soient liés par une simple relation de proportionnalité,

$$y(t) = kx(t) \quad (4.7)$$

où k est une constante. En introduisant (4.7) en (4.6) on obtient

$$R_{xy}(\tau) = kR_{xx}(\tau) \quad (4.8)$$

R_{xy} atteint son extremum en $\tau = 0$. Sinon, un extremum de R_{xy} sur un point $\tau = \tau_0$ signifie que

$$y(t) = kx(t + \tau_0) \quad (4.9)$$

est un meilleur modèle. Alors, τ_0 est le décalage des deux séries temporelles x et y l'une par rapport à l'autre.

L'analyse spectrale des différents termes de l'Equation (4.1) montre que la puissance spectrale de l'accélération verticale de l'avion a_v , obtenue par les mesures trajectographiques, se situe dans la même bande spectrale que la vitesse du fléau dB/dt (voir les Figures 4.4 et 4.6). De plus, les formes des deux spectres se ressemblent. Mais le spectre ne donne pas des informations sur la position des composantes d'un signal sur l'axe du temps. On conclut donc qu'un modèle mathématique comme (4.9) est valable entre a_v et dB/dt . Ce qui signifie que la fonction de "cross-correlation" entre ces deux séries donne leur décalage temporelle. Dans un exemple donné par Verdun (2000), le décalage entre ces deux signaux atteint 15 s.

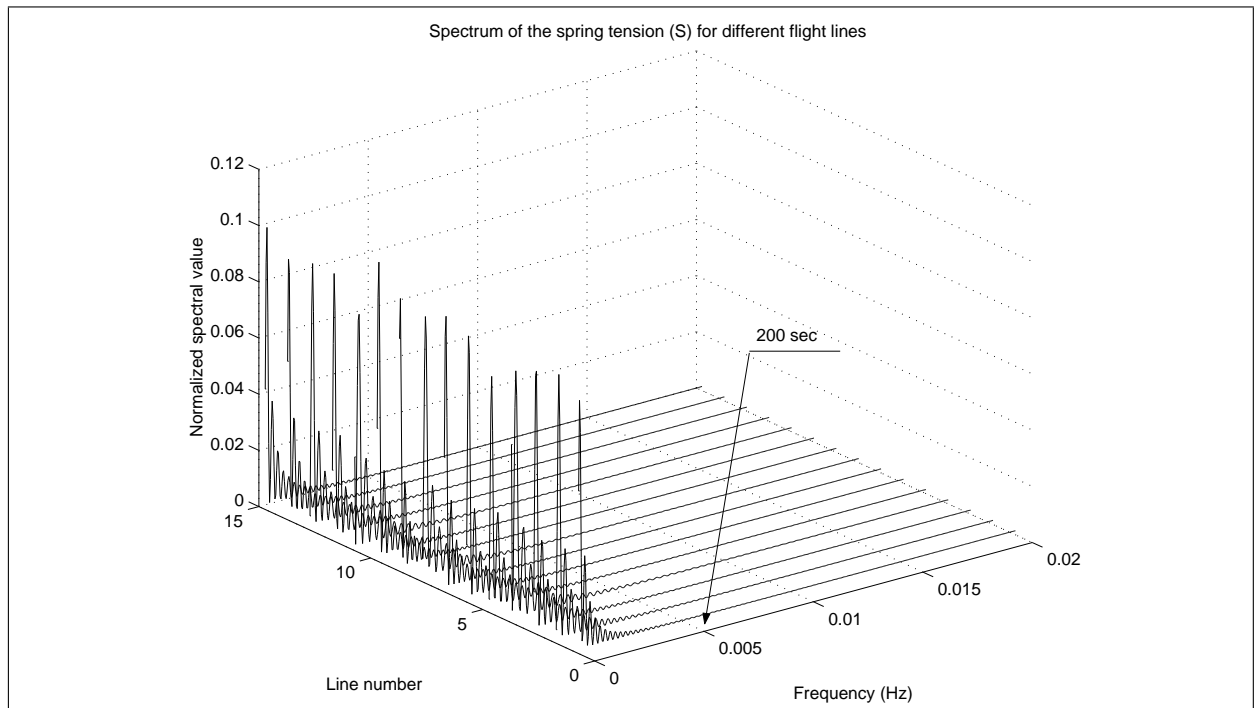
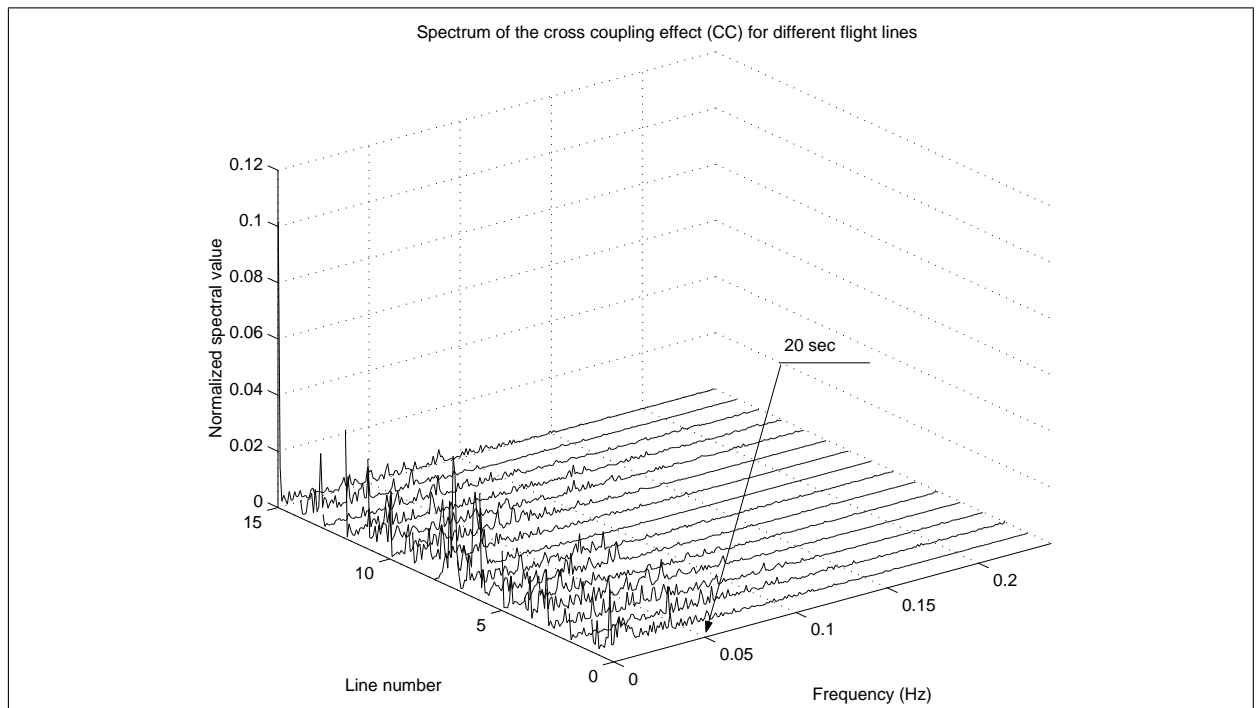
D'autres types de mesure peuvent être utilisés pour trouver le décalage. Olesen (2002) utilise ainsi la composante verticale issue de l'INS.

4.1.3 Analyse spectrale

Pour connaître le contenu spectral des observations, une analyse spectrale est nécessaire. Nous avons pour notre part utilisé l'*analyse spectrale par moindres carrées* (LSSA)¹. Cette méthode est une généralisation de la méthode de transformée de Fourier. Dans le cas d'une série temporelle avec lacunes, ou en présence de composantes non-trigonométriques, la méthode LSSA est plus puissante que les autres méthodes d'analyse spectrale [Abbasi (1999)]. Sans entrer dans les détails de cette technique, nous présentons les spectres des séries temporelle des différents termes en (4.1).

Les Figures 4.1 à 4.7 montrent l'ensemble des spectres pour les données acquises lors du projet aérogravimétriques sur les Alpes (voir Chapitre 5).

¹Least Squares Spectral Analysis

FIG. 4.1 – Ensemble des spectres de la tension du ressort S pour les différentes lignes d'acquisition.FIG. 4.2 – Ensemble des spectres de l'effet de couplage CC pour les différentes lignes d'acquisition.

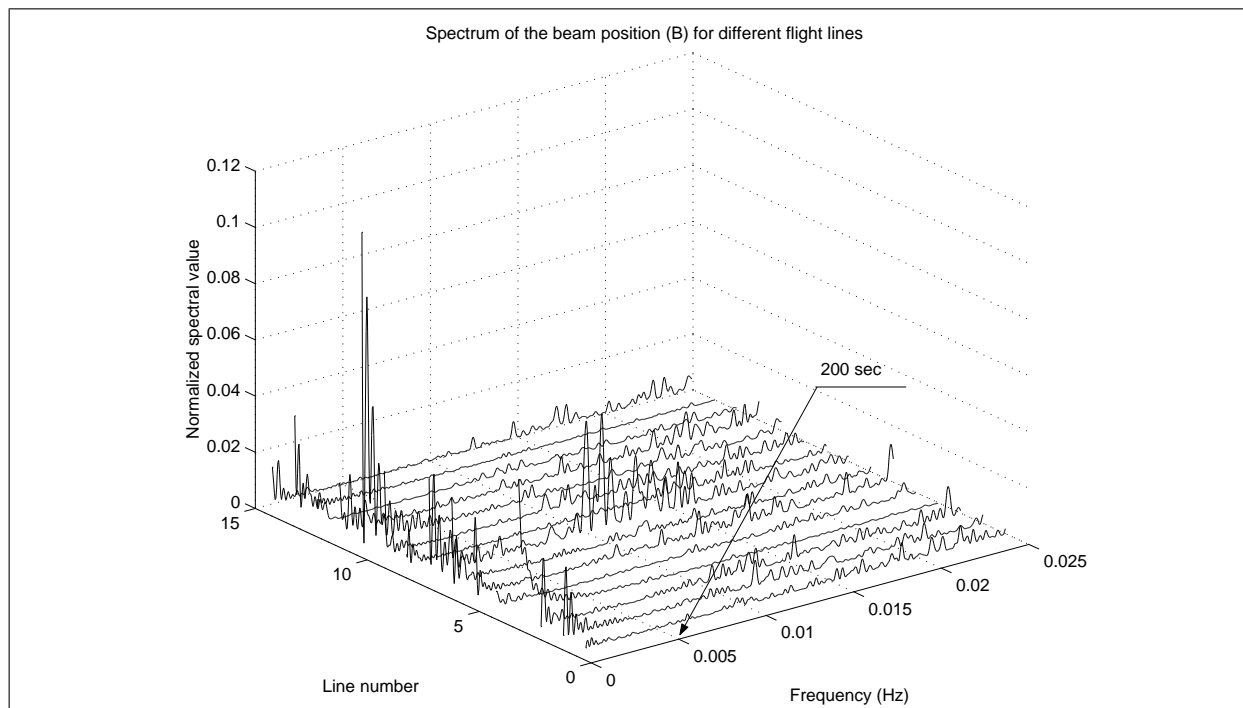


FIG. 4.3 – Ensemble des spectres de la position du fléau B pour les différentes lignes d'acquisition.

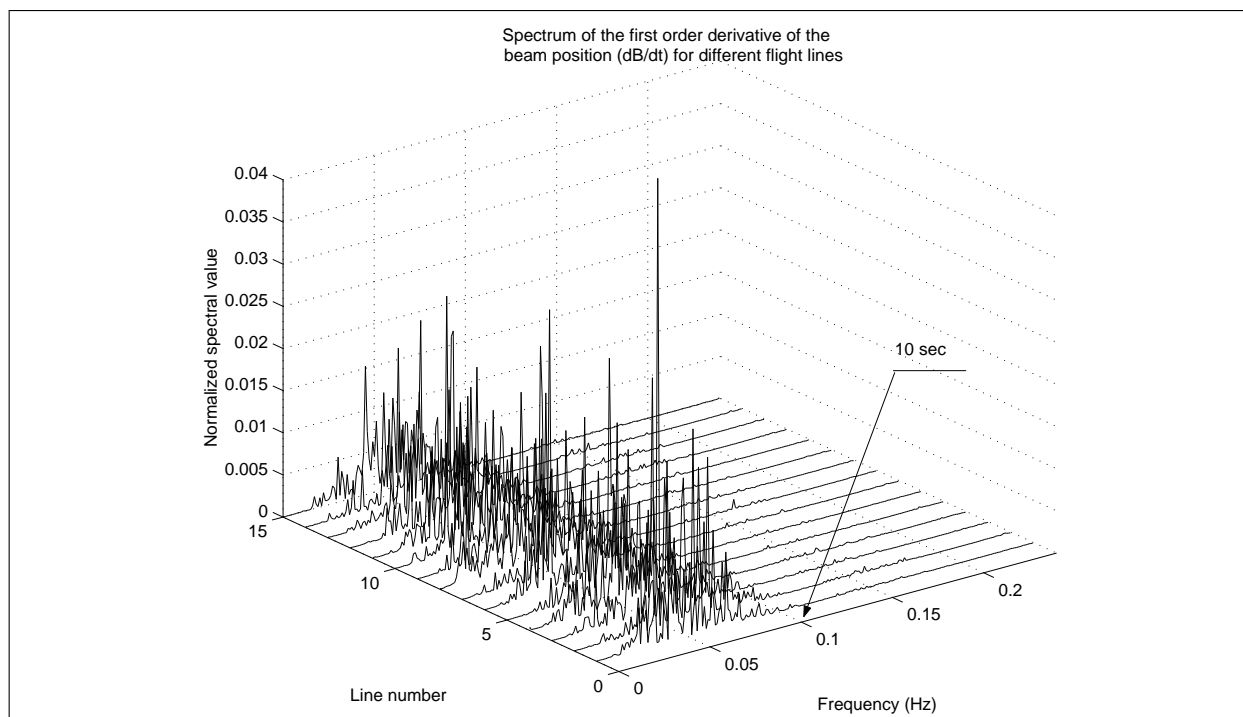


FIG. 4.4 – Ensemble des spectres de la vitesse du fléau dB/dt pour les différentes lignes d'acquisition.

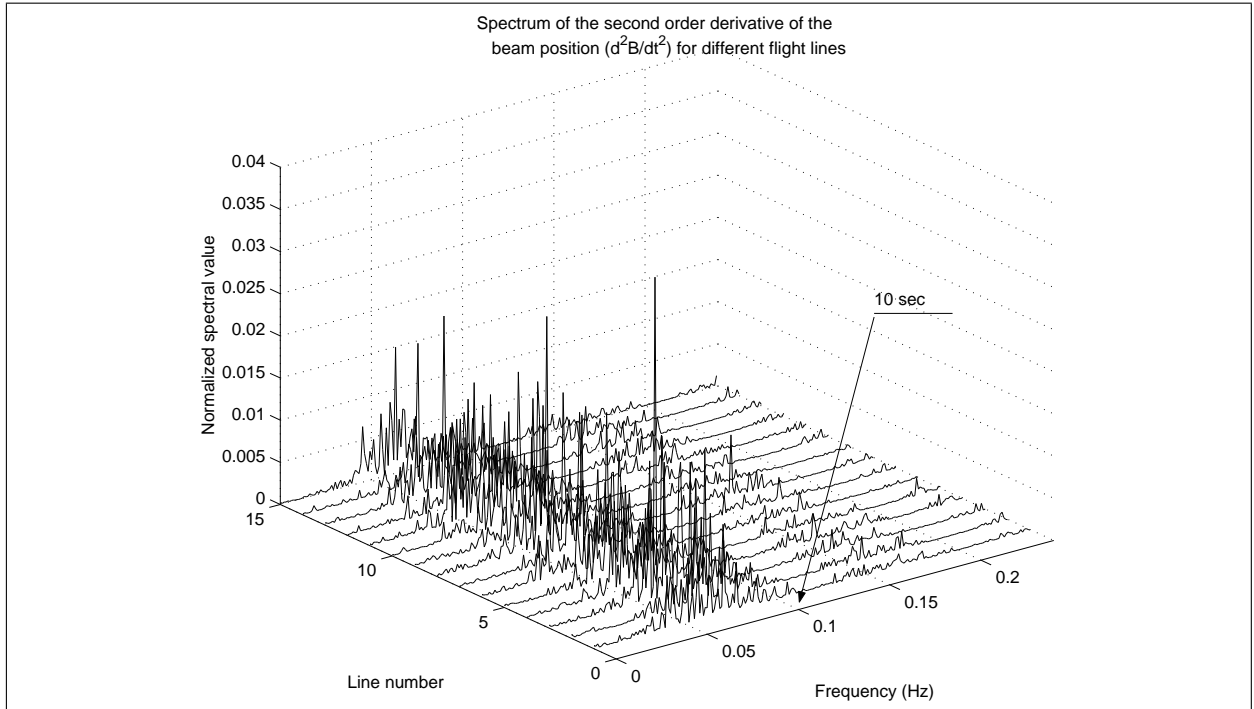


FIG. 4.5 – Ensemble des spectres de la dérivée seconde de la position du fléau d^2B/dt^2 pour les différentes lignes d'acquisition.

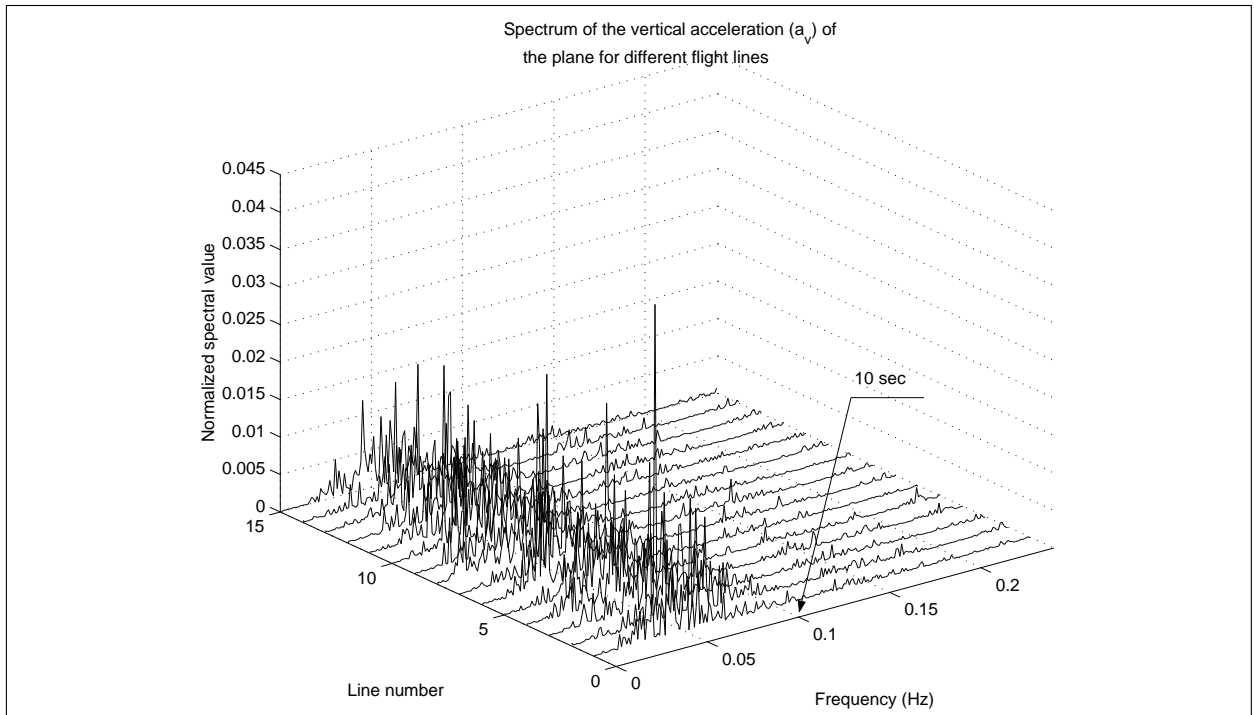


FIG. 4.6 – Ensemble des spectres de l'accélération verticale a_v de l'avion pour les différentes lignes d'acquisition.

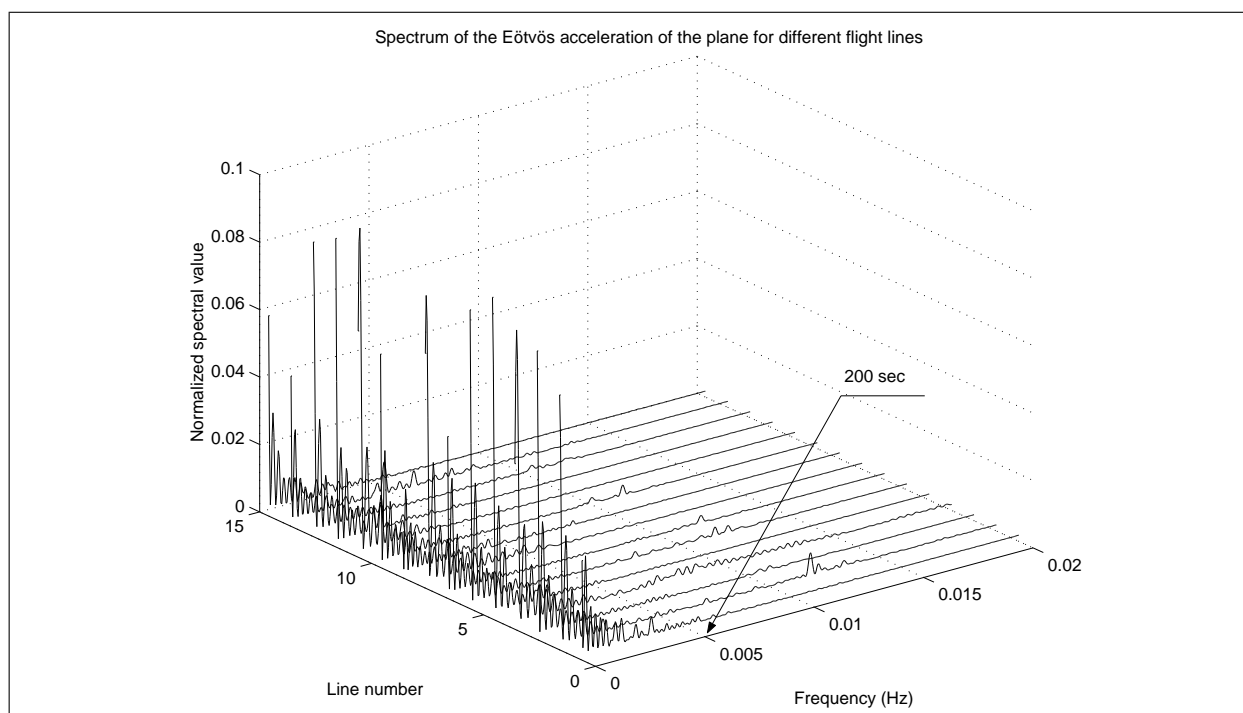


FIG. 4.7 – Ensemble des spectres de l'accélération Eötvös $a_{E\ddot{o}t}$ de l'avion pour les différentes lignes d'acquisition.

4.2 Filtrage direct des données aérogravimétriques

Le processus de filtrage est le point le plus délicat du traitement des données aérogravimétriques. Chaque filtre a ses propres caractéristiques. De plus, les informations exactes sur le contenu spectral attendu du champs de gravité à l'altitude de vol n'existent pas. Par conséquent, le choix de la fréquence de coupure reste douteux dans une vaste bande de longueurs d'ondes (généralement entre 5 km et 20 km). Plus on s'approche des petites longueurs d'ondes, plus l'influence des bruits sur la gravité estimée est forte. Au contraire, une fréquence de coupure très proche de zéro augmente le risque de perdre des informations sur le signal de la gravité. Le problème est de trouver un compromis entre la plus petite longueur d'onde qu'on obtient, dont la valeur moitié s'appelle *résolution*, et le niveau du bruit sur la gravité (la *précision*). Pour cette raison, on rencontre souvent dans la littérature le fait que la précision des résultats aérogravimétriques est exprimée en "mGal par km".

Dans les régions avec une topographie douce, avec existence de données gravimétriques au sol, on peut obtenir une fréquence de coupure à partir des données gravimétriques prolongées à l'altitude de vol. Par contre, dans les régions où les données au sol ne sont pas suffisantes, ou dans les régions montagneuses, cette technique n'est pas efficace. De plus, en zone montagneuse, les mesures gravimétriques sont souvent en fond de vallées.

Du fait de la complexité du problème, il n'y a pas encore de méthode standard de filtrage pour les données aérogravimétriques dans les régions montagneuses. Plusieurs références proposent différents filtres, selon les conditions du levé. Comme les données utilisées pour cette thèse correspondent aux mêmes séries de données que celles utilisées par Verdun et al. (2002), on explique ici le filtrage proposé par ces chercheurs afin de pouvoir comparer les résultats.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, nous rappelons que l'accélération a_T due à la plateforme et au système d'amortissement ne figure pas dans les modélisation précédemment publiées du système gravimétrique LaCoste & Romberg. Même dans l'article original de LaCoste (1967), p. 483, celui-ci considère que l'accélération verticale entre directement dans l'équation différentielle du fléau, en supposant qu'elle a une nature haute fréquence et qu'elle va être filtrée par la suite.

D'après les résultats d'analyse spectrale des termes de l'équation différentielle du gravimètre (4.1), Verdun et al. (2002) propose donc de séparer les termes avec contenu spectral basse fréquence de ceux ayant un contenu spectral haute fréquence. Ainsi, on peut écrire la solution de cette équation comme (cf. Figure 4.3)

$$B(t) = \overline{B}(t) + \tilde{B}(t) \quad (4.10)$$

où \overline{B} est la partie basse fréquence, et \tilde{B} est la partie haute fréquence du mouvement de fléau. En négligeant les faibles fluctuations, pour une période T de temps, les termes \overline{B} , \overline{S} , $\overline{a_{E\ddot{ot}}}$ et \overline{g} restent quasiment constants. Ainsi, on obtient les deux équations différentielles

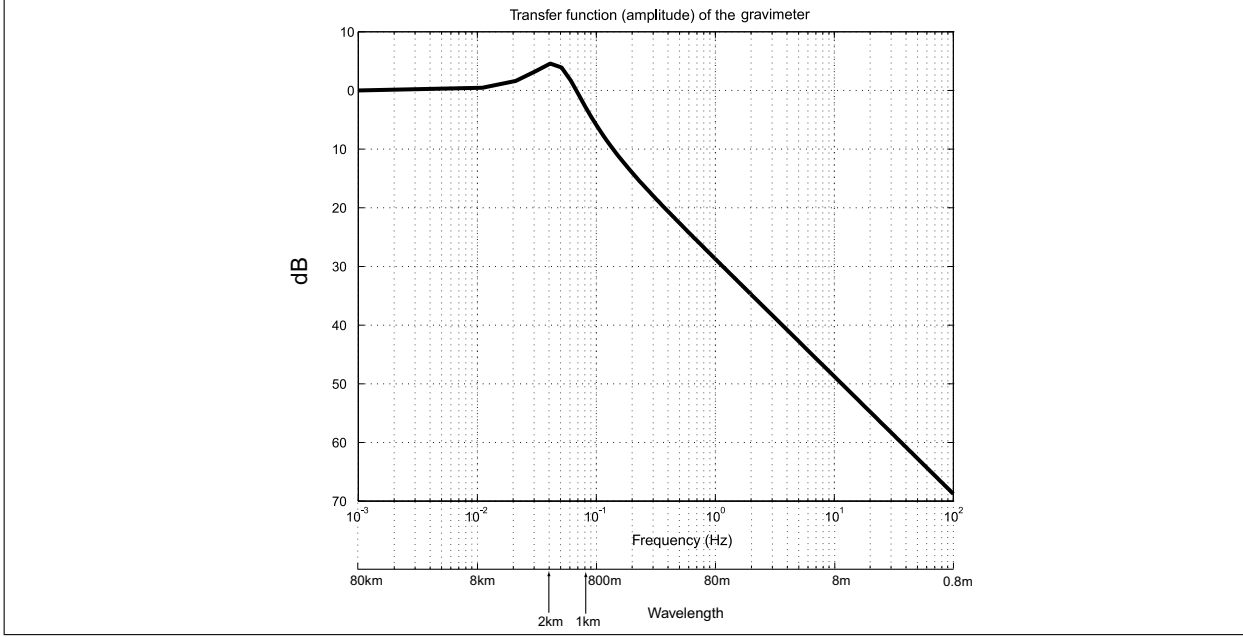


FIG. 4.8 – Fonction de transfert du gravimètre. Les longueur d'ondes sont calculées pour une vitesse moyenne de 80 *m/sec* de l'avion.

suivantes :

$$\frac{d^2 \bar{B}}{dt^2} + \alpha \frac{d\bar{B}}{dt} + \beta \bar{B}(t) = K(\bar{S}(t) - S_0) - \bar{a}_{E\ddot{o}t}(t) - \bar{g}(t) \quad (4.11)$$

$$\frac{d^2 \tilde{B}}{dt^2} + \alpha \frac{d\tilde{B}}{dt} + \beta \tilde{B}(t) = \widetilde{CC}(t) - \tilde{a}_v + \varepsilon \beta \tilde{a}_h(t) \bar{B}(t) \quad (4.12)$$

où ε est une constante et \tilde{a}_h est l'accélération horizontale de l'avion. On note que l'accélération de gravité n'apparaît qu'en (4.11). Après avoir étudié la fonction de transfert du capteur gravimétrique (Figure 4.8), Verdun et al. (2002) simplifient l'Equation (4.11) pour obtenir une simple expression pour $g(t)$ à l'altitude de vol :

$$\begin{aligned} g(t) &= \bar{g}(t) \\ &= K(\bar{S}(t) - S_0) - \bar{a}_{E\ddot{o}t}(t) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ils utilisent ensuite un filtre exponentiel passe-bas pour filtrer $S(t)$ et $a_{E\ddot{o}t}(t)$, avec la fonction de transfert H de la forme

$$H(f) = e^{-af} \quad (4.14)$$

où f est la fréquence et a est un paramètre déterminant le degré du filtrage. Après une analyse théorique sur le contenu fréquentiel du signal de la gravité à l'altitude de vol, et en considérant une vitesse de 80 *m/sec* pour l'avion, ils obtiennent

$$a = 75R$$

où R est la résolution en kilomètre. Les valeurs utilisées pour R sont en général de l'ordre de 5 km à 10 km , ce qui correspond à des longueurs d'onde de 10 km à 20 km respectivement. A 80 m/sec , 10 km à 20 km correspondent à des fréquences de coupure respectivement de 0.008 Hz ($\equiv 125$ sec) à 0.004 Hz ($\equiv 250$ sec).

La mise en œuvre du filtre est faite par la relation

$$y(t) = \text{IFT}[H(f)X(f)] \quad (4.15)$$

avec :

IFT	transformée de Fourier inverse,
$X(f) = \text{FT}[f(t)]$	transformée de Fourier du signal d'entrée $f(t)$,
$y(t)$	sortie du filtre.

Un problème qu'on rencontre lors de l'application de ce filtre, est du à la fréquence de coupure qui est très proche de zéro (à peu près 0.005 Hz). La fonction de transfert d'un filtre idéal est un rectangle dans le domaine de fréquence. La transformée de Fourier inverse de cette fonction (la réponse impulsionnelle du filtre) est une fonction sinus cardinal dont le domaine va de moins l'infini à plus l'infini, et qui ressemble à un cosinus amorti. Autrement dit, pour réaliser un filtre idéal, on a besoin des données de moins l'infini à plus l'infini, ce qui n'est bien sûr pas le cas en réalité. En pratique, on ne garde qu'une partie de la réponse impulsionnelle du filtre, en général son "lobe principal". Or, la fonction de transfert du filtre, en pratique, n'est plus un rectangle mais une version déformée, surtout dans la bande de transition. Par conséquent, une distorsion apparaît sur les composantes de la sortie du filtre qui se situent dans cette bande. Lorsque la fréquence de coupure est petite, la largeur de cette bande devient plus importante, et donc la construction du filtre plus difficile.

4.3 Notre nouvelle approche : l'équation intégrale du gravimètre

4.3.1 De l'équation différentielle à l'équation intégrale

L'Equation différentielle (4.1) reprise sous la forme d'une équation intégrale devient [Zwillinger (1998)]

$$B(t) = h(t) + \int_{t_a}^{t_b} H(t, \zeta) B(\zeta) d\zeta \quad (4.16)$$

avec :

$$h(t) = B(t_a) + \int_{t_a}^t (t - \zeta) F(\zeta) d\zeta + \frac{t - t_a}{t_b - t_a} \left[B(t_b) - B(t_a) - \int_{t_a}^{t_b} (t_b - \zeta) F(\zeta) d\zeta \right] \quad (4.17)$$

et

$$H(t, \zeta) = \begin{cases} \frac{t - t_b}{t_b - t_a} [\alpha + \beta(t_a - \zeta)] & t > \zeta \\ \frac{t - t_a}{t_b - t_a} [\alpha + \beta(t_b - \zeta)] & t < \zeta \end{cases} \quad (4.18)$$

On réécrit (4.17) sous la forme

$$h(t) = B(t_a) + \int_{t_a}^{t_b} \Theta(t, \zeta) (t - \zeta) F(\zeta) d\zeta + \frac{t - t_a}{t_b - t_a} \left[B(t_b) - B(t_a) - \int_{t_a}^{t_b} (t_b - \zeta) F(\zeta) d\zeta \right] \quad (4.19)$$

où

$$\Theta(t, \zeta) = \begin{cases} 1 & t_a \leq \zeta \leq t \\ 0 & t < \zeta \leq t_b \end{cases}$$

Après réarrangement nous obtenons :

$$h(t) = B(t_a) + \frac{t - t_a}{t_b - t_a} (B(t_b) - B(t_a)) + \int_{t_a}^{t_b} W(t, \zeta) F(\zeta) d\zeta \quad (4.20)$$

avec

$$W(t, \zeta) = \begin{cases} -\frac{t - t_a}{t_b - t_a} (t_b - \zeta) + t - \zeta & t_a \leq \zeta \leq t \\ -\frac{t - t_a}{t_b - t_a} (t_b - \zeta) & t < \zeta \leq t_b \end{cases} \quad (4.21)$$

On introduit (4.20) en (4.16) :

$$\int_{t_a}^{t_b} W(t, \zeta) F(\zeta) d\zeta = B(t) - B(t_a) - \frac{t - t_a}{t_b - t_a} (B(t_b) - B(t_a)) - \int_{t_a}^{t_b} H(t, \zeta) B(\zeta) d\zeta \quad (4.22)$$

Le problème maintenant est de résoudre cette équation intégrale pour l'inconnue $g(\zeta)$ qui est une fonction de $F(\zeta)$. Pour avoir une expression explicite en g , on reprend l'Equation (4.2) et on la réécrit sous la forme

$$F(t) = g_{ref} + K (S(t) - S_0) + CC(t) - (\delta g(t) + \gamma(t) + a_v(t) - a_T(t) + a_{E\ddot{t}}(t)) \quad (4.23)$$

où $\delta g = g - \gamma$ est la *perturbation de gravité* et γ est la gravité normale créée par l'ellipsoïde de référence. D'après Hofmann-Wellenhopf et Moritz (2005), pour un point A de coordonnées géodésiques (φ, λ, h) , la gravité normale est calculée par l'expression suivante :

$$\gamma_h(A) = \gamma_0 - \frac{2\gamma_a}{a} \left[1 + f + m + (-3f + \frac{5}{2}m)\sin^2\varphi \right] h + \frac{3\gamma_a}{a^2} h^2 \quad (4.24)$$

où γ_0 est la gravité normale sur la surface de l'ellipsoïde au point $(\varphi, \lambda, 0)$ et est calculée par

$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_a \cos^2\varphi + b\gamma_b \sin^2\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}} \quad (4.25)$$

Les valeurs numériques des paramètres de ces deux dernières équations pour l'ellipsoïde de référence WGS84 sont données dans le Tableau 4.1.

La perturbation de gravité peut être divisée en deux parties : la partie basse fréquence et la partie haute fréquence. On passe pour cela par l'intermédiaire du *potentiel perturbateur* $T = U - U_E$, où U est le potentiel de gravitation terrestre et U_E le potentiel de gravitation normale créé par l'ellipsoïde de référence. La représentation mathématique du potentiel perturbateur T en série d'harmoniques sphériques dans un système de coordonnées sphériques géocentrique lié à la Terre est

$$T(r, \vartheta, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{\ell=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{\ell} \sum_{m=0}^{\ell} \left(\Delta C_{\ell m} \cos(m\lambda) + \Delta S_{\ell m} \sin(m\lambda) \right) P_{\ell m}(\cos \vartheta) \quad (4.26)$$

avec :

r, ϑ, λ	coordonnées géocentriques d'un point A ,
G	constante de la gravitation,
M	masse de la Terre,
R	rayon d'une sphère contenant le globe,
$P_{\ell m}$	fonctions associées de Legendre normalisées .

TAB. 4.1 – Valeurs numériques des paramètres de l'ellipsoïde de référence WGS84. D'après Hofmann-Wellenhof et Moritz (2005)

Paramètre	Valeur	Description
a	6378137.0 m	demi-grand axe
b	6356752.3142 m	demi-petit axe
f	1/298.257223563	$f = \frac{a-b}{a}$, aplatissement
GM	3986004.418E+8 m^3/s^2	produit de constante gravitationnelle et de la masse de la Terre
ω	7.2921150E-5 rad/s	vitesse angulaire de la rotation terrestre
γ_a	9.7803253359 m/s^2	gravité normale à l'équateur
γ_b	9.8321849378 m/s^2	gravité normale au pôle
m	0.00344978650684	$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{(GM)}$

TAB. 4.2 – Coefficients normalisés du potentiel gravitationnel normal en développement en harmoniques sphériques pour l'ellipsoïde de référence WGS84

$\tilde{C}_{2,0}$	-4.8416677502924E-04
$\tilde{C}_{4,0}$	7.9030373370051E-07
$\tilde{C}_{6,0}$	-1.6872496123923E-09
$\tilde{C}_{8,0}$	3.4605246883042E-12
$\tilde{C}_{10,0}$	-2.6500222802050E-15

Les coefficients $\Delta C_{\ell m}$ et $\Delta S_{\ell m}$ sont donnés par :

$$\begin{aligned}\Delta C_{\ell m} &= C_{\ell m} - \tilde{C}_{\ell m} \\ \Delta S_{\ell m} &= S_{\ell m} - \tilde{S}_{\ell m}\end{aligned}$$

avec :

- $C_{\ell m}$ et $S_{\ell m}$ coefficients normalisés des harmoniques sphériques du potentiel gravitationnel terrestre,
- $\tilde{C}_{\ell m}$ et $\tilde{S}_{\ell m}$ coefficients correspondants au potentiel normal

Les $C_{\ell m}$ et $S_{\ell m}$ sont donnés par les modèles géopotentiels. Pour un ellipsoïde de révolution, tous les $\tilde{S}_{\ell m}$ et $\tilde{C}_{\ell m}$ sont nuls sauf les $\tilde{C}_{\ell 0}$ pour $\ell = 2, 4, 6, \dots$. Les cinq premiers non-zéro $\tilde{C}_{\ell 0}$ pour l'ellipsoïde WGS84 sont donnés sur le Tableau 4.2.

La perturbation de gravité est reliée en approximation sphérique au potentiel perturbateur par

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} \quad (4.27)$$

Ainsi, δg développé en série d'harmoniques sphériques est

$$\delta g(r, \vartheta, \lambda) = \frac{GM}{r^2} \sum_{\ell=2}^{\infty} (\ell+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell} \sum_{m=0}^{\ell} \left(\Delta C_{\ell m} \cos(m\lambda) + \Delta S_{\ell m} \sin(m\lambda) \right) P_{\ell m}(\cos \vartheta) \quad (4.28)$$

La limite L entre la partie basse fréquence et haute fréquence de δg est déterminée par les dimensions de la région de mesure. Pour une région de la dimension $\Delta^\circ \times \Delta^\circ$, la minimum résolution qu'on peut obtenir pour δg est de Δ° (longueur d'onde de $2\Delta^\circ$). Le degré minimale L pour une telle région correspond donc à $L = 180^\circ / \Delta^\circ$. En mettant par exemple $\Delta = 4^\circ$, $L = 45$. On écrit donc

$$\delta g = \delta g_L + \delta g^H \quad (4.29)$$

avec :

$$\delta g_L(r, \vartheta, \lambda) = \frac{GM}{r^2} \sum_{\ell=2}^L (\ell+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell} \sum_{m=0}^{\ell} \left(\Delta C_{\ell m} \cos(m\lambda) + \Delta S_{\ell m} \sin(m\lambda) \right) P_{\ell m}(\cos \vartheta) \quad (4.30)$$

$$\delta g^H(r, \vartheta, \lambda) = \frac{GM}{r^2} \sum_{\ell=L+1}^{\infty} (\ell+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell} \sum_{m=0}^{\ell} \left(\Delta C_{\ell m} \cos(m\lambda) + \Delta S_{\ell m} \sin(m\lambda) \right) P_{\ell m}(\cos \vartheta) \quad (4.31)$$

La partie basse fréquence δg_L est calculée à partir des modèles géopotentiels comme EGM96. Le paramètre inconnu reste alors δg^H . On remplace alors (4.29) en (4.23), puis en (4.22) et on réarrange les termes pour obtenir finalement

$$\int_{t_a}^{t_b} W(t, \zeta) \delta g^H(\zeta) d\zeta = y(t) \quad (4.32)$$

où

$$y(t) = \left[\frac{t - t_a}{t_b - t_a} (B(t_b) - B(t_a)) - (B(t) - B(t_a)) \right] + \int_{t_a}^{t_b} H(t, \zeta) B(\zeta) d\zeta + \int_{t_a}^{t_b} W(t, \zeta) Y(\zeta) d\zeta \quad (4.33)$$

et

$$Y(t) = g_{ref} + K (S(t) - S_0) + CC(t) - [\gamma(t) + \delta g_L(t) + a_v(t) - a_T(t) + a_{E\ddot{ot}}(t)] \quad (4.34)$$

La fonction $H(t, \zeta)$ est donnée également par (4.18).

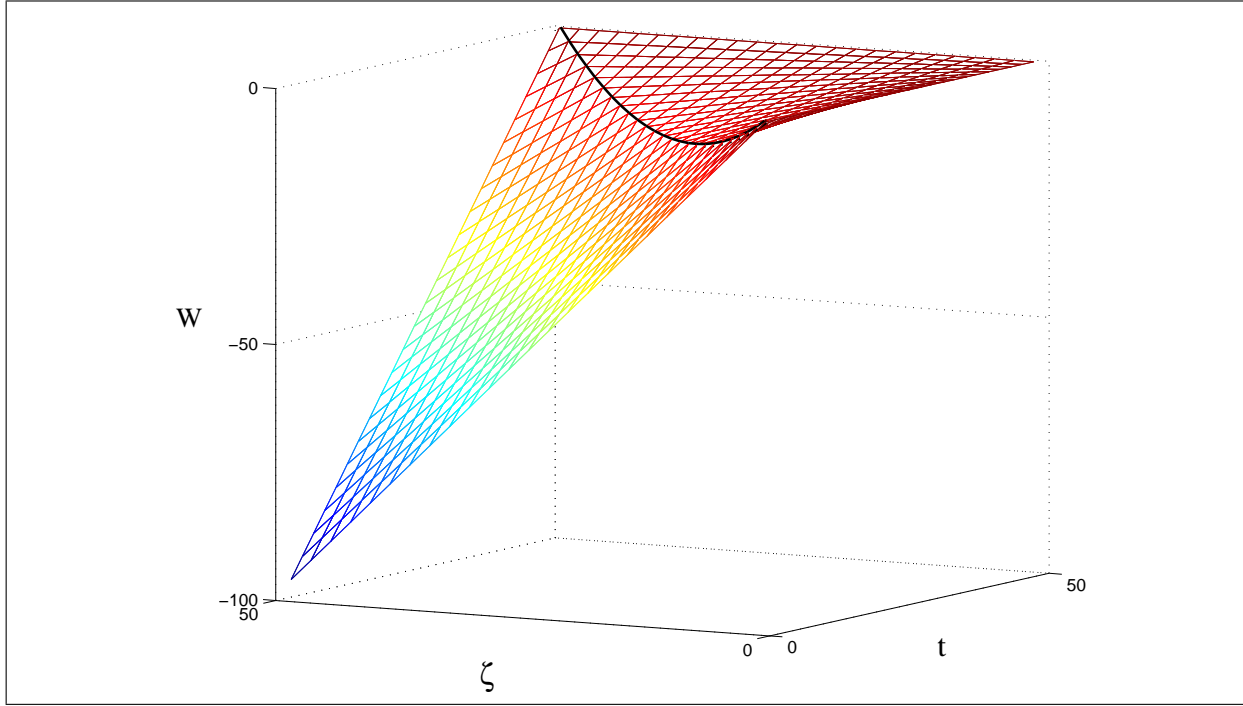


FIG. 4.9 – Noyau de l'équation intégrale du gravimètre.

Ainsi, pour chaque ligne de vol nous avons une équation intégrale. L'Equation (4.32) est une équation intégrale de Fredholm de première espèce de noyau $W(t, \zeta)$. On rappelle que le noyau $W(t, \zeta)$ est donné par

$$W(t, \zeta) = \begin{cases} -\frac{t-t_a}{t_b-t_a}(t_b-\zeta) + t - \zeta & t_a \leq \zeta \leq t \\ -\frac{t-t_a}{t_b-t_a}(t_b-\zeta) & t < \zeta \leq t_b \end{cases}$$

Ce noyau est un noyau non-symétrique ($W(t, \zeta) \neq W(\zeta, t)$) et est de type "divisé"¹ (la dérivée partielle de W par rapport à ζ n'est pas continue). La forme de ce noyau est montrée sur la Figure 4.9.

4.3.2 Résoudre l'équation intégrale du gravimètre

Résoudre le problème linéaire $Ax = y$ revient à estimer sa solution x à partir des données initiales y . Soient x_1 et x_2 deux vecteurs appartenants à l'espace des fonctions continues, avec $y_1 = Ax_1$ et $y_2 = Ax_2$. Par définition, on dit que le problème de la recherche d'une solution est stable vis-à-vis des données initiales si $\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta(\epsilon) > 0$ tel que :

$$\|y_2 - y_1\| \leq \delta(\epsilon) \quad \text{implique} \quad \|x_2 - x_1\| \leq \epsilon$$

¹En Anglais "split-type kernel"

Par définition le problème est bien posé si l'on vérifie les conditions suivantes :

1. $\forall y$ il existe une solution x ,
2. la solution est définie de façon unique,
3. le problème est stable.

Dans le cas contraire, on dit que le problème est *mal posé*.

Résoudre une équation de Fredholm de première espèce constitue par nature un problème mal posé. Le traitement des problèmes mal posés est largement traité dans la littérature. Tikhonov et Arsenin (1977) ont proposé une méthode de résolution pour les problèmes mal posés, fondée sur la notion de régularisation. On cherche selon cette méthode une solution x_μ de telle sorte que

$$\begin{aligned} x_\mu &= \arg \min \{U_\mu(x, y)\} \\ &= \arg \min \{\|Ax_\mu - y\|^2 + \mu^2 \|x_\mu\|^2\} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Cette fonctionnelle est appelée fonctionnelle de Tikhonov. La solution x_μ est une fonction du paramètre de régularisation μ , du choix de la norme du paramètre inconnu $\|x_\mu\|$, ainsi que de la distance $\|Ax_\mu - y\|$.

4.3.2.1 Système linéaire correspondant à l'équation intégrale du gravimètre

Pour résoudre l'Equation (4.32) numériquement, on effectue un maillage généralement uniforme de pas Δt sur l'intervalle $[t_a, t_b]$. Ainsi, la solution δg^H est calculée pour les valeurs en progression arithmétique $t_k = t_a + (k - 1)\Delta t$, $k = 1, 2, \dots, n$ où n est le nombre des points. En utilisant une technique d'intégration usuelle (trapèze, rectangle, Simpson, ...), nous pouvons écrire formellement l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \int_{t_a}^{t_b} W(t, \zeta) \delta g^H(\zeta) d\zeta &\doteq \Delta t \sum_{j=1}^n W(t_k, t_j) \delta g^H(t_j) \\ &= y(t_k) \end{aligned} \quad (4.36)$$

D'après l'expression (4.21), en mettant $t = t_a$ et $t = t_b$, on trouve que $W(t_1, t_j)$, $W(t_n, t_j)$, $W(t_k, t_1)$ et $W(t_k, t_n)$, $k, j = 1, 2, \dots, n$ sont identiquement nuls. Par conséquent, l'expression (4.36) sous la forme matricielle devient

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} + \mathbf{r} \quad (4.37)$$

avec :

- A** matrice $(n - 2) \times (n - 2)$ des coefficients,
- x** vecteur $(n - 2) \times 1$ des inconnues $[\delta g^H(t_2), \delta g^H(t_3), \dots, \delta g^H(t_{n-1})]^T$,
- y** vecteur $(n - 2) \times 1$ avec son $i^{\text{ème}}$ élément égal à $y(t_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, n - 2$,

\mathbf{r} vecteur des erreurs associées.

4.3.2.2 Solution de moindres carrés

Etant un problème mal posé, soit il n'y a pas de solution pour (4.37), soit cette solution est instable. Nous devons donc introduire des contraintes supplémentaires afin de régulariser le problème, et nous allons voir que ces contraintes nous conduisent à la méthode de régularisation proposée par Tikhonov. Comme \mathbf{x} est un signal avec une amplitude proche de zéro, nous pouvons considérer que

$$\mathbb{E}[\mathbf{x}] = \mathbf{0}$$

avec la matrice de variance-covariance

$$\mathbb{E}[\mathbf{x}\mathbf{x}^T] = \mathbf{C}_x$$

Ainsi, notre problème à résoudre devient un problème avec connaissance a priori sur les inconnues. On écrit ce problème sous la forme

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{r} \\ \mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{0} + \mathbf{x} \end{cases} \quad (4.38)$$

ou également

$$\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{y}' + \mathbf{r}' \quad (4.39)$$

avec :

\mathbf{I}	matrice unité de $(n-2) \times (n-2)$,
$\mathbf{A}' = [\mathbf{A}^T, \mathbf{I}]^T$	matrice $2(n-2) \times (n-2)$ des coefficients,
$\mathbf{y}' = [\mathbf{y}^T, \mathbf{0}]^T$	vecteur $2(n-2) \times 1$,
$\mathbf{r}' = [\mathbf{r}^T, \mathbf{x}^T]^T$	vecteur $2(n-2) \times 1$ des résidus.

On considère également que la matrice de "cross-correlation" entre \mathbf{x} et \mathbf{y} est identique à zéro. La matrice de covariance de \mathbf{y}' peut être écrite comme

$$\mathbf{C}_{\mathbf{y}'} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_x \end{pmatrix}$$

où \mathbf{C}_y est la matrice de covariance du vecteur \mathbf{y} .

Ainsi, la solution de (4.39), au sens des moindres carrés, est [Vaníček et Krakiwsky (1986), p. 266]

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{C}_y^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{C}_x^{-1})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C}_y^{-1} \mathbf{y} \quad (4.40)$$

L'Equation (4.40) est valable pour une connaissance exacte de \mathbf{C}_x et \mathbf{C}_y . Mais, on ne connaît des approximations \mathbf{Q}_x et \mathbf{Q}_y de ces matrices, dans le meilleur cas, qu'à un facteur

d'échelle près :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_x &= \sigma_{0,x}^2 \mathbf{Q}_x \\ \mathbf{C}_y &= \sigma_{0,y}^2 \mathbf{Q}_y \end{aligned} \quad (4.41)$$

$\sigma_{0,x}^2$ et $\sigma_{0,y}^2$ sont des *facteurs variance* inconnus. En introduisant (4.41) en (4.40) nous arrivons à

$$\hat{\mathbf{x}} = (\hat{\sigma}_{0,y}^{-2} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{A} + \hat{\sigma}_{0,x}^{-2} \mathbf{Q}_x^{-1})^{-1} \hat{\sigma}_{0,y}^{-2} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{y} \quad (4.42)$$

Selon Vaníček et Krakiwsky (1986), comme on ne connaît pas exactement les matrices de covariance employées dans (4.42), cette équation est une solution approximative. En plus de la solution (4.42), nous avons :

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{x}}} = (\hat{\sigma}_{0,y}^{-2} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{A} + \hat{\sigma}_{0,x}^{-2} \mathbf{Q}_x^{-1})^{-1} \quad (4.43)$$

où $\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{x}}}$ est la *matrice de covariance a posteriori des inconnues*. Cette matrice est une mesure de la précision du vecteur $\hat{\mathbf{x}}$. L'équation intégrale du gravimètre nous donne la possibilité d'écrire (4.37) pour l'ensemble des lignes de vol, avec le vecteur inconnu \mathbf{x} pour tous les points de mesure. Par conséquent, la solution (4.42) sera une solution pour la totalité de la zone. La matrice $\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{x}}}$ constitue un critère interne de la précision du levé aérogravimétrique.

$\hat{\sigma}_{0,x}^2$ et $\hat{\sigma}_{0,y}^2$ en (4.42) sont des estimations pour $\sigma_{0,x}^2$ and $\sigma_{0,y}^2$. Parmi les méthodes connues pour estimer les facteurs de variance se trouvent la *méthode des degrés de liberté* et la *méthode d'Helmert*. Par la première méthode, nous avons les deux estimateurs suivants :

$$\hat{\sigma}_{0,x}^2 = \frac{\hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q}_x^{-1} \hat{\mathbf{x}}}{n_1} \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}_{0,y}^2 = \frac{(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y})^T \mathbf{Q}_y^{-1} (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y})}{n_1 - n_2} \quad (4.44)$$

où n_1 et n_2 sont les nombres des lignes et des colonnes de la matrice des coefficients \mathbf{A} . Pour notre cas $n_1 = n_2 = n - 2$. Nous ne pouvons donc pas utiliser les estimateurs de (4.44).

La méthode d'Helmert (d'après Sillard (2001)) est expliquée en Annexe D.

4.3.2.3 Méthode de régularisation

La solution $\hat{\mathbf{x}}_\mu$ du problème défini par l'Equation (4.35), au sens des moindres carrés, est

$$\hat{\mathbf{x}}_\mu = (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_y \mathbf{A} + \mu^2 \mathbf{P}_x)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_y \mathbf{y} \quad (4.45)$$

où \mathbf{P}_y et \mathbf{P}_x sont des tenseurs métriques pour les espaces des observations et des inconnues respectivement. En pratique, la matrice \mathbf{Q}_x^{-1} constitue (avec une erreur bien sûr) le tenseur métrique de l'espace des inconnues, car la norme quadratique d'un vecteur dans cet espace est définie par

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{Q}_x}^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_x^{-1} \mathbf{x} \quad (4.46)$$

De même la matrice \mathbf{Q}_y^{-1} est le tenseur métrique de l'espace des observations :

$$\|\mathbf{r}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 = \mathbf{r}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{r} \quad (4.47)$$

avec $\mathbf{r} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}$. Maintenant, on écrit (4.42) sous la forme

$$\hat{\mathbf{x}}_\mu = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{A} + \mu^2 \mathbf{Q}_x^{-1})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{y} \quad (4.48)$$

avec :

$$\mu^2 = \frac{\hat{\sigma}_{0,y}^2}{\hat{\sigma}_{0,x}^2} \quad (4.49)$$

En comparant la solution (4.48) ou (4.42) avec celle donnée par (4.45) il est évident que les deux solutions sont identiques pour les normes (4.46) et (4.47). Autrement dit, la solution $\hat{\mathbf{x}}_\mu$ minimise avec ces normes la fonctionnelle U_μ en (4.35) réécrite sous la forme [Kusche et Klees (2001)]

$$U_\mu = \|\mathbf{A}\mathbf{x}_\mu - \mathbf{y}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 + \mu^2 \|\mathbf{x}_\mu\|_{\mathbf{Q}_x}^2 \quad (4.50)$$

Choix du paramètre de régularisation

Trouver une valeur "raisonnable" pour μ est un sujet délicat. Plusieurs méthodes sont proposées dans la littérature. Nous allons estimer μ par deux méthodes :

- La première méthode est une méthode a posteriori. L'Equation (4.49) donne une estimation de μ . Comme on obtient $\hat{\sigma}_{0,y}^2$ et $\hat{\sigma}_{0,x}^2$ avec la méthode d'Helmert, on appelle le μ obtenu par (4.49) solution d'Helmert.
- La deuxième méthode est une méthode heuristique. Comme le but est de minimiser (4.50), on trace $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{Q}_x}^2$ et $\|\mathbf{r}\|_{\mathbf{Q}_y}^2$ pour toutes les valeurs de $\mu > 0$ (cf. Figure 4.10). Le paramètre de régularisation contrôle le degré de lissage de la solution. Plus ce paramètre est grand, plus l'estimation $\hat{\mathbf{x}}_\mu$ est biaisée, et plus il est petit, plus la solution ressemble à l'estimation de moindres carrés sans contrainte.

Si les matrices \mathbf{Q}_x et \mathbf{Q}_y sont construites correctement, les courbes des deux normes se croisent en un point qui correspond au μ "optimal" [Morozov (1984)]. Cette technique est appelée la technique de la *courbe* L^1 car la courbe de $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{Q}_x}^2$ ressemble à un "L" quand elle est représentée en échelle logarithmique.

¹L-curve technique

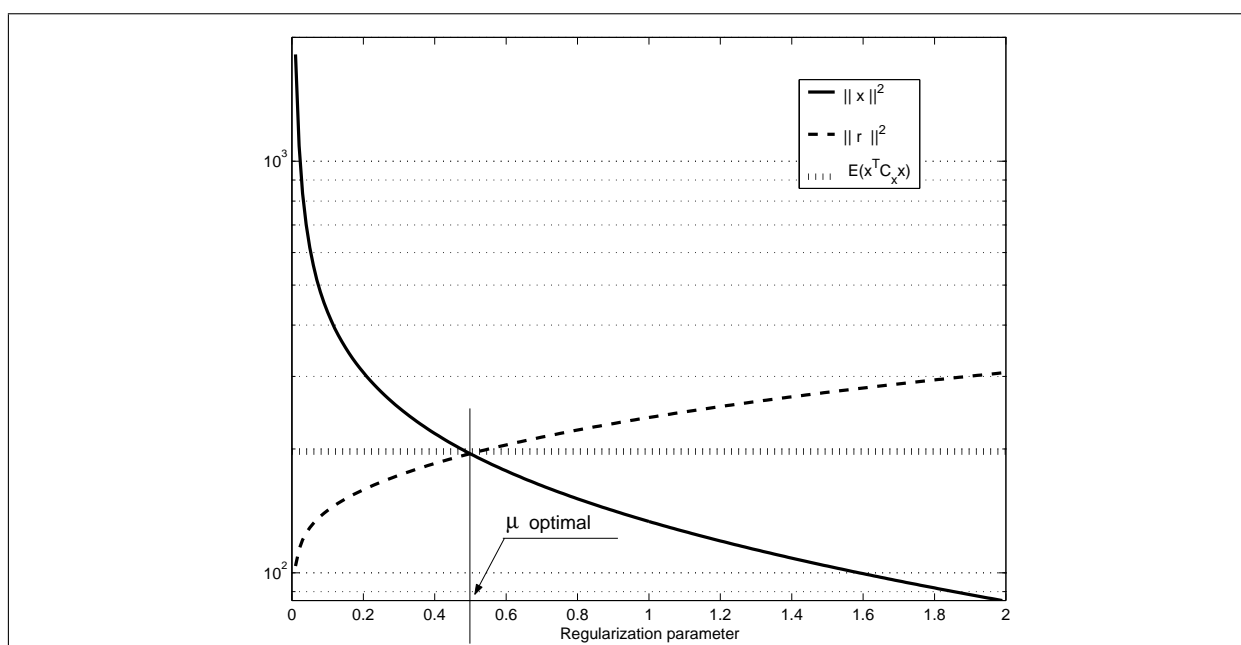


FIG. 4.10 – Choix du paramètre de régularisation.

4.4 Matrices nécessaires à la solution au sens des moindres carrés

4.4.1 Matrice de covariance a priori des inconnues

Pour construire la matrice \mathbf{Q}_x , nous avons besoin d'une connaissance a priori du comportement de la perturbation de gravité inconnue, sur la zone d'étude à l'altitude de vol. Les modèles géopotentiels mettent à notre disposition les informations nécessaires sur les différentes fonctionnelles du champ de gravité terrestre. Mais le contenu fréquentiel des informations accessibles d'après ces modèles est limité. Car ils ont été calculés à partir des mesures satellitaires pour les grandes longueurs d'ondes, et des mesures terrestres disponibles pour les petites longueurs d'ondes (dans le cas des modèles combinés comme EGM96). Reigber et al. (2005) présentent le modèle EIGEN-GRACE02S complet jusqu'au degré et ordre 150 à partir des mesures purement satellitaires, et donne une liste des modèles géopotentiels récents. D'après Flury (2006) dans un proche avenir des modèles combinés de très haute résolution (comme EGM06 qui contient des coefficients de degré et ordre jusqu'à 2160, basé sur une grille des données $5' \times 5'$) seront disponibles. Pourtant, sur les régions à la couverture gravimétrique déficiente, ces modèles ne seront pas fiables. Flury (2006) conclut que la qualité des informations obtenues à partir des modèles globaux, au-delà de degré 360 ne sera pas garantie pour les prochaines années.

D'ailleurs, si ces modèles contenaient les informations sur la totalité de la bande de fréquence, nous n'aurions plus besoin des mesures aérogravimétriques !

Il existe de nos jours le Centre International pour les Modèles Globaux Terrestre (ICGEM)¹ qui est l'un des six centres du Service International du Champs de Gravité (IGFS)², un service de l'Association International de la Géodésie (IAG)³. On trouve sur celui-ci les dernières informations sur les modèles géopotentiels, ainsi qu'une liste complète de ces modèles sur le site web de l'ICGEM⁴.

Le contenu fréquentiel des mesures aérogravimétriques est limité par la distance entre les lignes de vol. Cette distance représente la résolution d'échantillonnage du champ de gravité, qui correspond à la moitié de la plus petite longueur d'onde observée. La distance moyenne de 11 km correspond à ≈ 0.1 degré à l'équateur. Le degré maximum du contenu fréquentiel en développement en harmoniques sphérique est alors $180^\circ/\Delta^\circ = 1800$. Il faut ajouter que la résolution des mesures le long des profils, est beaucoup plus haute, mais pour une modélisation en développement en harmoniques sphériques, c'est la distance entre les profils qui est le facteur limitant.

Pour construire la fonction de covariance à partir de laquelle on calcule la matrice de covariance \mathbf{Q}_x , nous avons utilisé le modèle EGM96. Deux cas ont été étudiés : une fonction

¹International Center for Global Earth Models

²International Gravity Field Service

³International Association of Geodesy

⁴<http://www.gfz-potsdam.de/ICGEM/ICGEM.html>

de covariance homogène et isotrope (1) qui prend en compte les variations d'altitudes, (2) qui ne les prend pas en compte. Le terme homogène signifie que les paramètres de la fonction de covariance restent identiques sur la totalité de la zone (ils ne dépendent que de la distance entre points), et le terme isotrope signifie que la fonction de covariance est indépendante de l'azimut entre les points.

4.4.1.1 Fonction de covariance des perturbations de gravité sur la sphère

La partie haute fréquence de la perturbation de gravité est calculée selon (4.31) jusqu'au degré maximum disponible pour le modèle (360 pour EGM96) :

$$\delta g^H(r, \vartheta, \lambda) = \frac{GM}{r^2} \sum_{\ell=L+1}^{L+N} (\ell+1) \left(\frac{R}{r}\right)^\ell \sum_{m=0}^{\ell} \left(\Delta C_{\ell m} \cos(m\lambda) + \Delta S_{\ell m} \sin(m\lambda) \right) P_{\ell m}(\cos \vartheta) \quad (4.51)$$

Par définition, la fonction de covariance locale, homogène et isotrope de la perturbation de gravité, entre les points $P(\vartheta, \lambda)$ et $Q(\vartheta', \lambda')$ sur une sphère, à l'altitude moyenne de vol est donnée par [Knudsen (1987)] :

$$C_{\delta g^H \delta g^H}(\psi) = \frac{1}{A} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \delta g^H(\vartheta, \lambda) \delta g^H(\vartheta', \lambda') \sin \vartheta d\vartheta d\lambda d\alpha \quad (4.52)$$

avec :

(r, ϑ, λ) et $(r, \vartheta', \lambda')$	coordonnées sphériques des points,
$\vartheta_1, \vartheta_2, \lambda_1, \lambda_2$	étendue de la région,
α	azimut,
A	superficie de la région sur la sphère de rayon unité,
ψ	distance sphérique entre les points.

L'angle ψ est calculé à partir des coordonnées (ϑ, λ) et (ϑ', λ') par

$$\cos \psi = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\lambda - \lambda')$$

L'évaluation de l'intégrale est faite par une maillage sur la sphère. Les $\delta g^H(\vartheta, \lambda)$ et $\delta g^H(\vartheta', \lambda')$ sont calculés par (4.51). En calculant tous les produits $\delta g^H(P_i) \delta g^H(P_j)$ où P_i et P_j sont deux points sur la grille, on obtient un nuage des points en fonction de la distance sphérique entre les points (Figure 4.11).

L'Equation (4.52) est ensuite écrite sous la forme

$$C_{\delta g^H \delta g^H}(\psi_k) = \frac{1}{n_k} \sum_k \delta g^H(P_i) \delta g^H(P_j) \quad (4.53)$$

où n_k est le nombre des produits pour une distance sphérique ψ_k donnée. Ainsi, on obtient une courbe moyenne de covariance à partir du nuage des points (Figure 4.11).

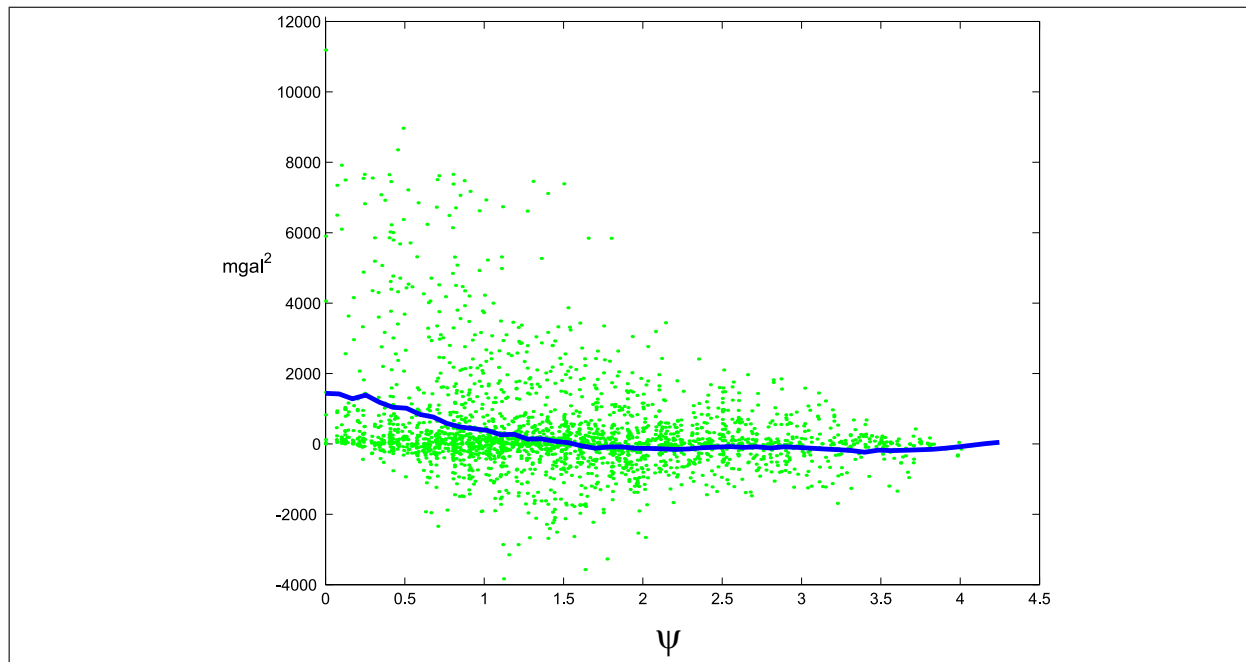


FIG. 4.11 – Nuage des points obtenu par les produits des perturbations de gravité, et la courbe moyenne de covariance correspondante. Cette courbe présente des valeurs négatives pour $1.5 < \psi < 4.8$ et on remarque la forte dispersion des valeurs expérimentales.

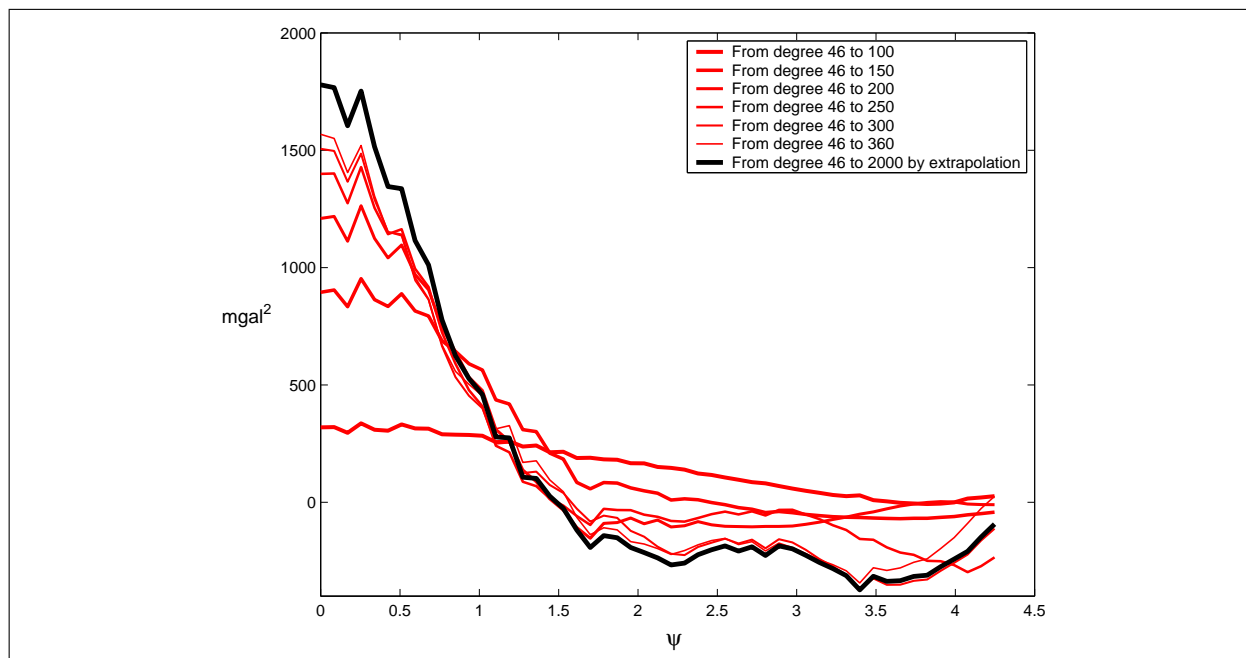


FIG. 4.12 – Différentes courbes de covariance de perturbation de gravité, correspondant aux différents degrés de coupure, ainsi que la courbe obtenue par extrapolation jusqu'au degré 2000. Les données utilisées sont obtenues à partir du modèle géopotentiel EGM96.

Le contenu spectral de δg^H mesuré est de très haute fréquence (à l'ordre du degré 2000), alors que le modèle EGM96 a des coefficients du potentiel terrestre jusqu'au degré 360. Pour que la fonction de covariance calculée contienne l'influence des composantes de haute fréquence, nous avons extrapolé les courbes calculées par (4.53) de manière suivante :

1. On calcule la courbe moyenne de covariance pour un nuage des points calculé avec les δg^H jusqu'au degré $L + N_1$ par (4.51).
2. On calcule de la même manière les courbes moyennes de covariance pour les δg^H jusqu'au degré de troncature $L + N_i$, $N_1 < N_i < 360$ par (4.51).
3. On calcule par extrapolation la courbe de covariance correspondante au degré désiré (par exemple 2000).

La Figure 4.12 montre les courbes obtenues pour différents degrés ainsi que la courbe finale obtenue par extrapolation jusqu'au degré 2000.

L'étape suivante est de trouver une fonction *positive-définie* et de l'ajuster¹ sur la courbe finale obtenue par extrapolation. Car les fonctions de covariances doivent être par nature des fonctions positives-définies. Une liste non exhaustive des fonctions positives-définies est citée par exemple par Papoulis (1965) et Teunissen (2001). La Figure 4.13 montre la courbe que nous avons calculée. On note que pour certains ψ cette courbe est négative. Une fonction de covariance de type exponentielle amortie a été ajustée à cette courbe (Figure 4.13) :

$$C(\psi) = C_0 e^{-\alpha|\psi|} \cos(\omega\psi) \quad (4.54)$$

avec :

$C_0 = C(0)$	variance ,
α	paramètre lié à la distance de corrélation,
ω	paramètre lié à la courbure de $C(\psi)$,
ψ	distance sphérique entre les points.

On note que $C(\psi)$ non seulement s'ajuste mieux sur la courbe de covariance empirique, mais aussi descend sous zéro, ce qui est la raison principale de notre choix. Les trois paramètres C_0 , α et ω sont en général essentiels pour le modélisation de bonnes fonctions de covariance locales du champ de gravité [Moritz (1980), p. 174]. La distance de corrélation est définie comme la valeur de ψ qui correspond à la moitié de la variance.

TAB. 4.3 – Fonctions de covariances illustrées Figure 4.13

Fonction de covariance	Expression
Proposée par Torge (1989)	$C_0 e^{(-\psi^2/\beta)}, \beta > 0$
Exponentielle amortie	$C_0 e^{-\alpha \psi } \cos(\omega\psi), \alpha > 0$
Processus de Markov ordre 2	$C_0 (1 + \psi /d) e^{(- \psi /d)}, d > 0$
Sinus cardinal	$C_0 \sin(\nu\psi)/(\nu\psi), \nu > 0$

¹"to fit" en Anglais

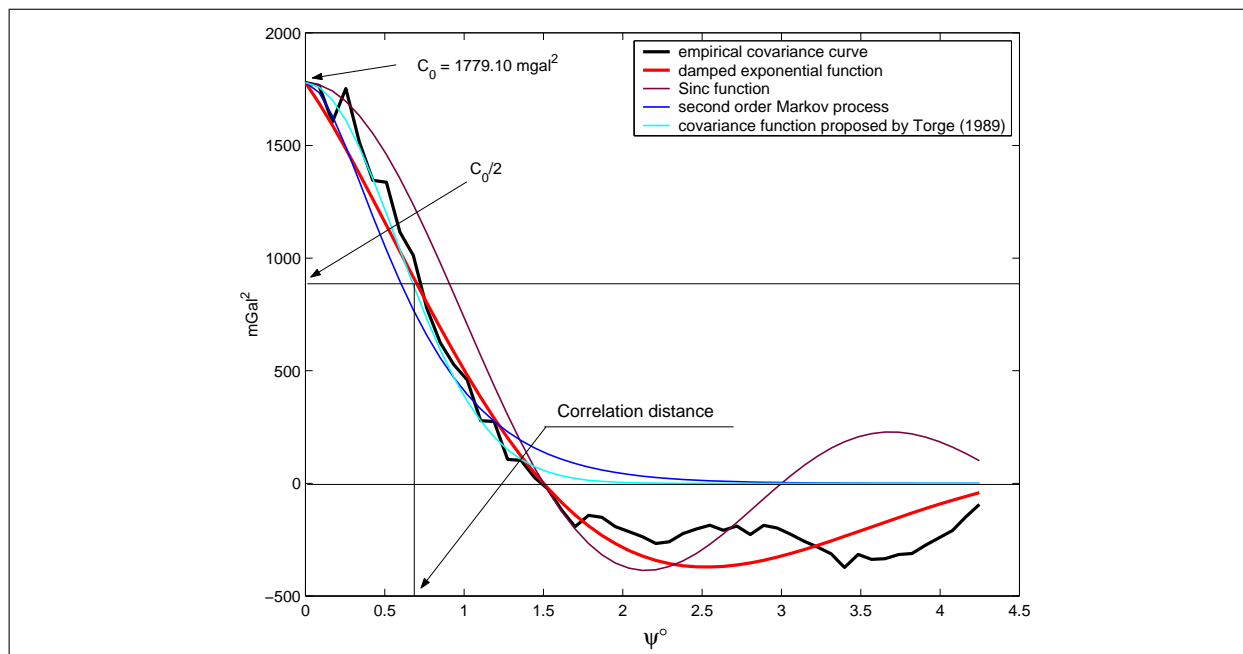


FIG. 4.13 – Courbe de la covariance empirique illustrée sur la Figure 4.11 et "fit" des fonctions de covariance positives définies donnée par le Tableau 4.3.

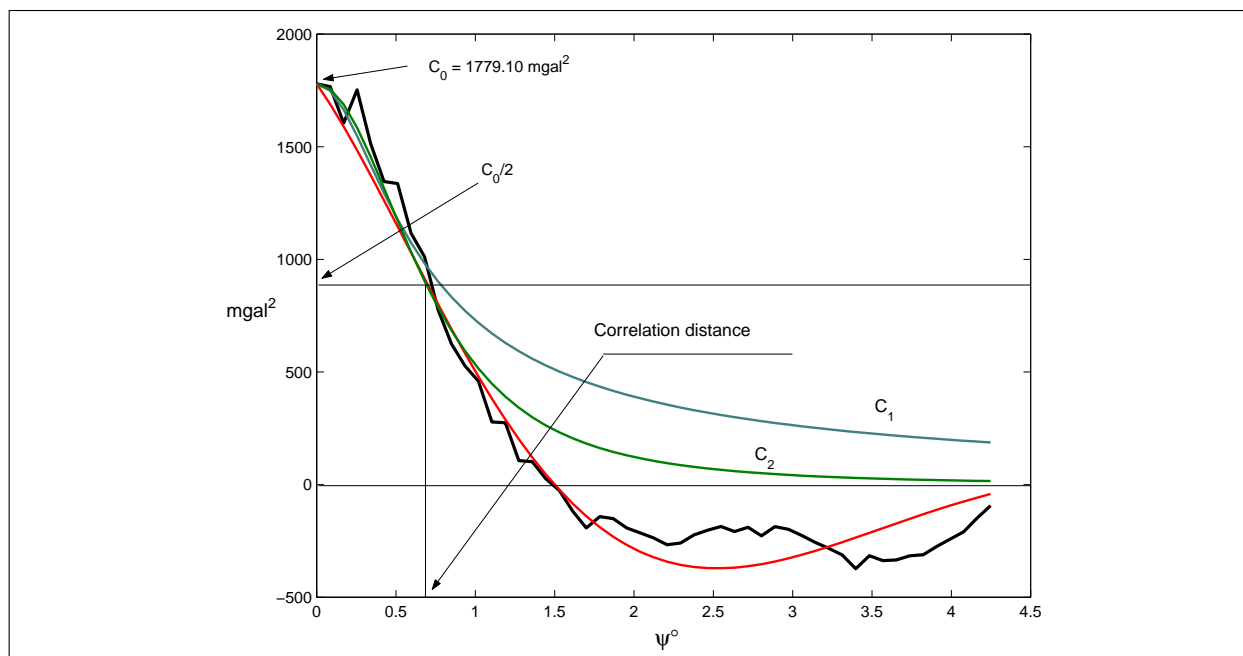


FIG. 4.14 – Les fonctions de covariance C_1 et C_2 ne descendent pas sous zéro et ne peuvent donc pas "fitter" la courbe des covariances empirique. En revanche elles prennent en compte les altitudes des points, contrairement à la fonction $C(\psi)$.

4.4.1.2 Fonction de covariance prenant en compte des altitudes des points

Pour le cas de l'Equation (4.54) nous avons pris en compte une géométrie sphérique. Nous n'avons pu dans le cadre de cette thèse trouver une "bonne" extension 3D de la fonction de covariance (4.54) ayant une expression finie. Pour l'approximation de la sphère par un plan tangentiel, Moritz (1980), p. 180, propose les deux fonctions suivantes :

$$C_1(P, Q) = \frac{C_0 b}{\sqrt{\rho^2 + (z + z' + b)^2}} \quad (4.55)$$

$$C_2(P, Q) = \frac{C_0 b^2 (z + z' + b)}{[\rho^2 + (z + z' + b)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (4.56)$$

avec :

P et Q deux points avec comme coordonnées (x, y, z) et (x', y', z') respectivement,
 $\rho = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ distance entre deux points sur le plan,
 b paramètre empirique,
 C_0 variance empirique.

La Figure 4.14 montre ces deux fonctions en plus de la fonction introduite par (4.54). On note que C_1 et C_2 ne descendent pas sous zéro et ne peuvent donc pas "fitter" a priori les valeurs expérimentales. Nous avons fait des tests d'inversion en considérant la fonction C_2 plutôt que (4.54) pour étudier l'effet de la différence des altitudes. Nous avons considéré pour z et z' en (4.56) la première fois les valeurs réelles des altitudes, et la deuxième fois une valeur constante qui est l'altitude moyenne de vol dans le système de coordonnées cartésien défini par le plan tangentiel. La maximum de la différence entre z et z' est de 300 m. La Figure 4.15 illustre les perturbations de gravité calculées, ainsi que leur différence. Cette différence est toujours autour de $\pm 1 \text{ mGal}$ sauf aux extrémités de la ligne où on constate un effet de bordure à cause de la régularisation. On peut donc conclure que la différence des altitudes de vol n'a pas un impact important sur les résultats finaux. Il est évident que la perturbation de gravité calculée par la fonction C_2 est différente de celle calculée par (4.54), à cause de la différence de la forme des fonctions (Figure 4.15).

4.4.2 Vecteur d'entrée de l'équation intégrale et matrice de covariance associée

4.4.2.1 Application de la loi de propagation de variance

Le vecteur \mathbf{y} dans (4.37) avec ses composantes données par (4.33), entre avec sa matrice de covariance \mathbf{Q}_y dans le processus de moindres carrés (4.43). Ce vecteur contient toutes les observations effectuées par le gravimètre, ainsi que des accélérations parasites qui sont des fonctions des observations GPS.

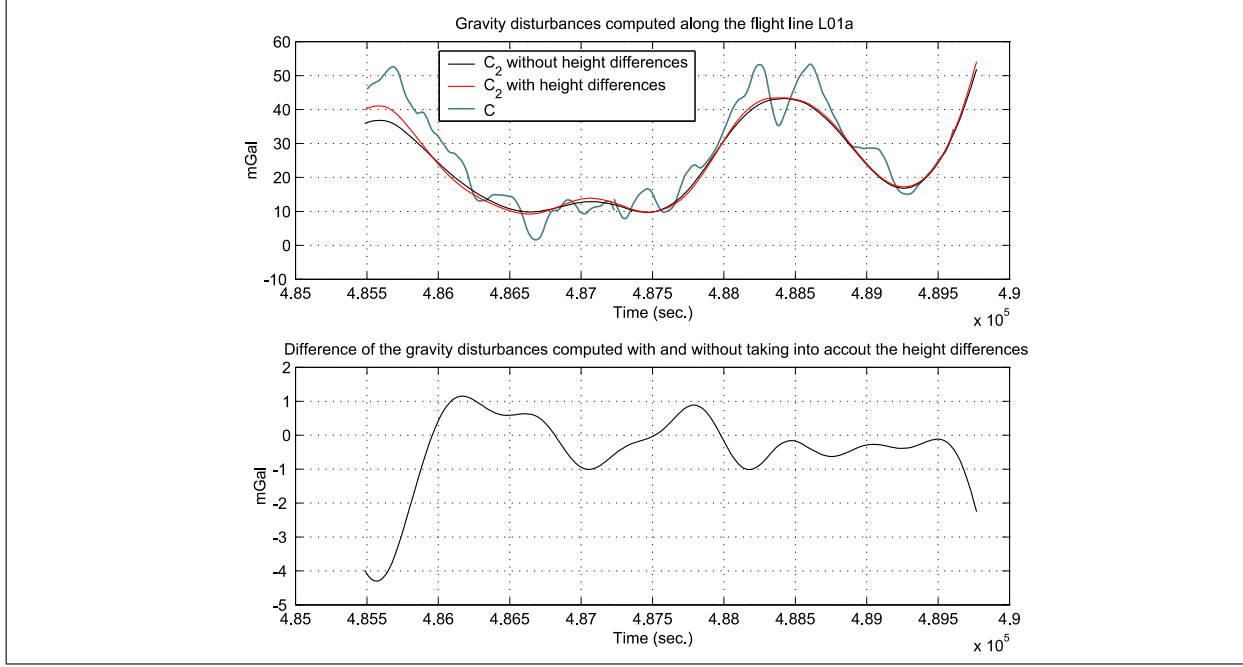


FIG. 4.15 – Perturbation de gravité calculée avec différentes fonctions de covariances : la fonction C_2 avec une altitude constante, la fonction C_2 prenant en compte des différences des altitudes, et la fonction $C(\psi)$ donnée par (4.54). La différences des perturbations de gravité due à la variation de l'altitude des points est faible sauf aux extrémités de la ligne de vol, et cela à cause de l'effet de la régularisation.

On réécrit l'Equation (4.33) sous la forme

$$y(t) = E(t) + \int_{t_a}^{t_b} W(t, \zeta) Y(\zeta) d\zeta \quad (4.57)$$

avec :

$$E(t) = \left[\frac{t - t_a}{t_b - t_a} (B(t_b) - B(t_a)) - (B(t) - B(t_a)) \right] + \int_{t_a}^{t_b} H(t, \zeta) B(\zeta) d\zeta \quad (4.58)$$

Pour les calculs numériques (4.58) est écrite comme

$$E(t_k) \doteq \left[\frac{t_k - t_a}{t_b - t_a} (B(t_b) - B(t_a)) - (B(t_k) - B(t_a)) \right] + \Delta t \sum_{j=1}^n H(t_k, t_j) B(t_j) \quad (4.59)$$

On note que $E(t_a) = E(t_b) = 0$. L'Equation (4.57) s'écrit alors sous forme matricielle comme :

$$\mathbf{y} \doteq \mathbf{EB} + \mathbf{AY} \quad (4.60)$$

avec :

- A** même matrice que pour (4.37),
- Y** vecteur $(n - 2) \times 1$ avec le $i^{\text{ème}}$ élément égal à $Y(t_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, n - 2$, donné par (4.34),
- B** vecteur $(n \times 1)$ des positions du fléau $[B(t_a), B(t_2), \dots, B(t_b)]^T$,
- E** matrice $(n - 2) \times n$ des coefficients, dont les éléments sont donnés par $\mathbf{E}(i, j) = \partial E(t_i) / \partial B(t_j)$.

On applique maintenant la loi de propagation de variance à (4.60) :

$$\mathbf{C}_y = \mathbf{E} \mathbf{C}_B \mathbf{E}^T + \mathbf{A} \mathbf{C}_Y \mathbf{A}^T \quad (4.61)$$

où \mathbf{C}_B et \mathbf{C}_Y sont les matrices de covariance de **B** et **Y** respectivement. \mathbf{C}_B est une matrice diagonale avec ses éléments égaux à σ_B^2 .

En utilisant (4.34), \mathbf{C}_Y peut être écrite comme

$$\mathbf{C}_Y = K^2 \mathbf{C}_S + K^2 \sigma_{S_0}^2 + \mathbf{C}_{CC} + \mathbf{C}_{\delta g_L} + \mathbf{C}_{a_v^*} + \mathbf{C}_{a_{E\ddot{o}t}} \quad (4.62)$$

avec :

- \mathbf{C}_S matrice de covariance diagonale de la tension du ressort,
- $\sigma_{S_0}^2$ variance de la tension du ressort mesurée à l'aéroport,
- \mathbf{C}_{CC} matrice de covariance diagonale de l'effet de couplage,
- $\mathbf{C}_{\delta g_L}$ matrice de covariance de δg_L calculée suivant le modèle (EGM96),
- $\mathbf{C}_{a_{E\ddot{o}t}}$ matrice de covariance de l'accélération d'Eötvös.

Nous avons aussi

$$a_v^* = a_v - a_T \quad (4.63)$$

avec $\mathbf{C}_{a_v^*}$ sa matrice de covariance associée. Nous appelons cette accélération, *accélération ressentie par le capteur gravimétrique*. Pour déterminer cette accélération nous avons utilisé une fonction de transfert de la plate-forme. Nous reviendrons sur ce sujet ultérieurement.

Pour les mesures gravimétriques S , B et CC , on peut avoir des estimations pour les variances correspondantes par les données constructeur. Par contre, pour a_v^* , $a_{E\ddot{o}t}$ et δg_L nous devons les déterminer nous même.

Nous examinerons d'abord la détermination des accélérations a_v , $a_{E\ddot{o}t}$, pour lesquelles une simple et double différentiation des séries temporelles issues de la trajectographie est nécessaire.

4.4.2.2 Accélération verticale de l'avion et sa matrice de covariance

Sur les séries temporelles issues des mesures, il existe toujours des bruits additionnels qui sont en général à "haute fréquence". Il est donc nécessaire de prendre en compte l'effet

de ces bruits au moment de la différentiation des séries chronologiques, car la différentiation est un problème mal posé : une petite perturbation sur le bruit de la série d'entrée, peut provoquer des grandes variations de la série différenciée. L'approche la plus simple est un lissage préalable des séries chronologiques avant différentiation. L'usage de splines est le plus répandu, mais la définition de la taille des fenêtres et du degré polynomial des splines devient alors crucial. De plus, l'usage de splines ne permet pas un accès facile à la matrice de covariance de la série différenciée. Bruton et al. (1999) introduit la notion de *différentiateur idéal*¹ et compare les différentes méthodes de différentiation numérique. Les méthodes comparées soit introduisent de grands biais sur la série différenciée, soit ne permettent pas un accès aisé à la matrice de covariance du résultat. Par exemple, la méthode de la série de Taylor (cf. Annexe E), introduit un biais important dû à la troncature de cette série, qui est fonction du contenu fréquentiel de la série à différencier. Cette méthode simple n'est applicable que pour les séries peu bruitées.

Kennedy (2003) propose une méthode de détermination de l'accélération verticale directement à partir des mesures brutes de phase par GPS, car selon lui, les positions GPS, en raison de la nécessité de fixation des ambiguïtés de phase, ne possèdent parfois pas une précision suffisante pour donner une bonne précision sur la détermination de l'accélération verticale. Verdun (2000) utilise une méthode de filtrage préalable basée sur une interpolation proche du krigeage pour la différentiation de la série temporelle. Olesen (2002) utilise la différentiation suivant la méthode simple du développement en série de Taylor. La raison de cette stratégie de différentiation brutale est que toutes les séries qui apparaissent dans l'équation différentielle du mouvement du fléau, seront filtrées in fine par un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure très proche de zéro. Les artefacts apparus dans les séries différenciées, seront en général également filtrés, car ils sont dans la partie haute de la bande de fréquence. Pour un problème similaire, Austen et al. (2001) utilisent une interpolation de type Gregory-Newton, et considèrent un modèle auto-régressif AR1 (cf. Annexe E) pour la série temporelle étudiée, avec 0.99% de corrélation entre deux points consécutifs.

Nous avons utilisé pour notre part une technique basée sur l'inversion d'une intégrale au sens des moindres carrés, expliquée en Annexe E. Pour appliquer cette technique nous avons besoin des fonctions d'autocorrélation des altitudes de vol, ainsi que la fonction d'autocorrélation a priori des accélérations de l'avion. Pour estimer ces fonctions, nous avons utilisé soit la technique du corrélogramme, soit la technique de la transformée de Fourier inverse, toutes les deux expliquées elles aussi dans l'Annexe E.

Il est important de noter que ces techniques ne sont valables que pour les séries temporelles stationnaires. Autrement dit, nous devons enlever la partie déterministe du signal avant toute manipulation. Selon Verdun (2000), la trajectoire suivie par l'avion coïncide, au premier ordre hors turbulences, avec une ligne isobare. En utilisant une carte des isobares, on peut donc modéliser, et soustraire une grande partie de la tendance déterministe. Si ces informations ne sont pas disponibles, nous pouvons ajuster à la série temporelle des fonctions prédéterminées comme des polynômes par un processus de moindres carrés (Fi-

¹ideal differentiator

gure 4.16).

La Figure 4.17 montre une série temporelle d'altitude de vol acquises lors d'un levé aérogravimétrique sur la Corse. La fonction d'autocorrélation de cette série est une exponentielle amortie obtenue par la méthode du corrélogramme (comparer avec la Figure E.3).

La fonction d'autocorrélation a priori des inconnues peut être obtenue soit à partir de l'accélération calculée par la méthode de la série de Taylor, soit à partir des mesures accélérométriques INS. La Figure 4.18 montre les spectres de ces deux séries d'accélérations, correspondant à la Figure 4.17.

La Figure 4.19 compare les résultats des différentes méthodes de différentiation appliquées sur la série temporelle de la Figure 4.17.

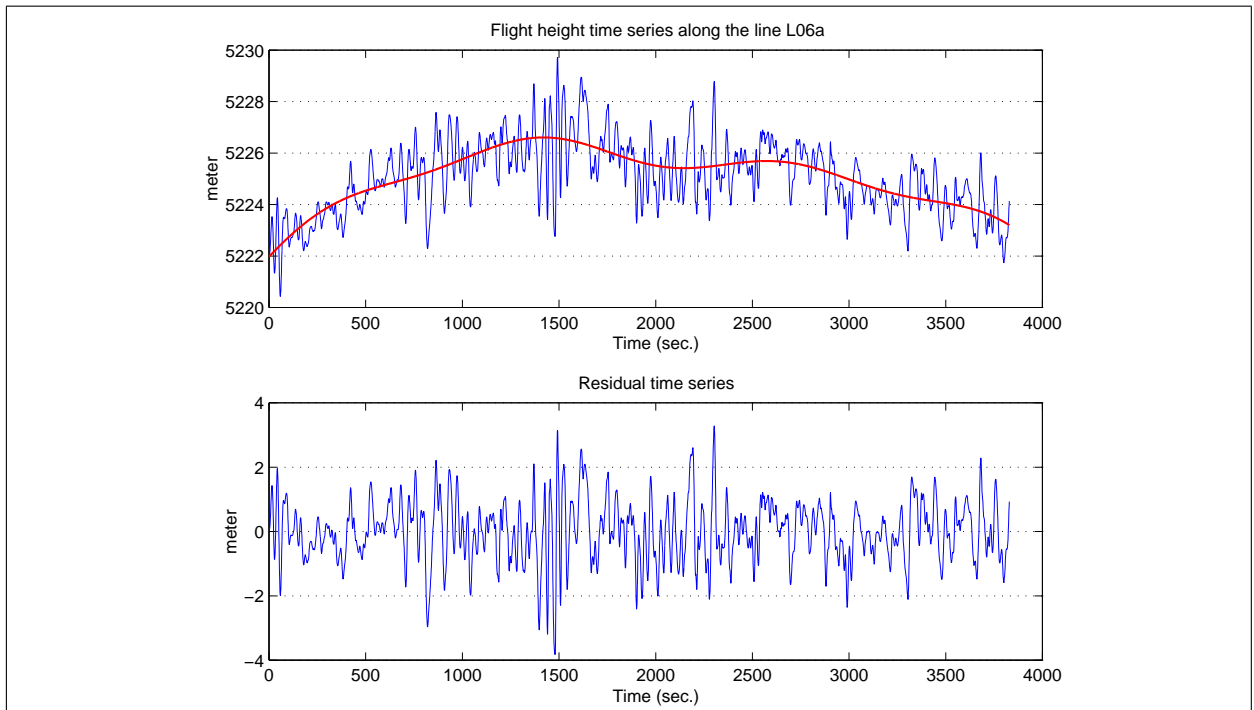


FIG. 4.16 – Altitude de vol le long d'une ligne de vol. On distingue facilement une tendance due aux surfaces isobares, et on peut la modéliser par des fonctions simples comme des polynômes.

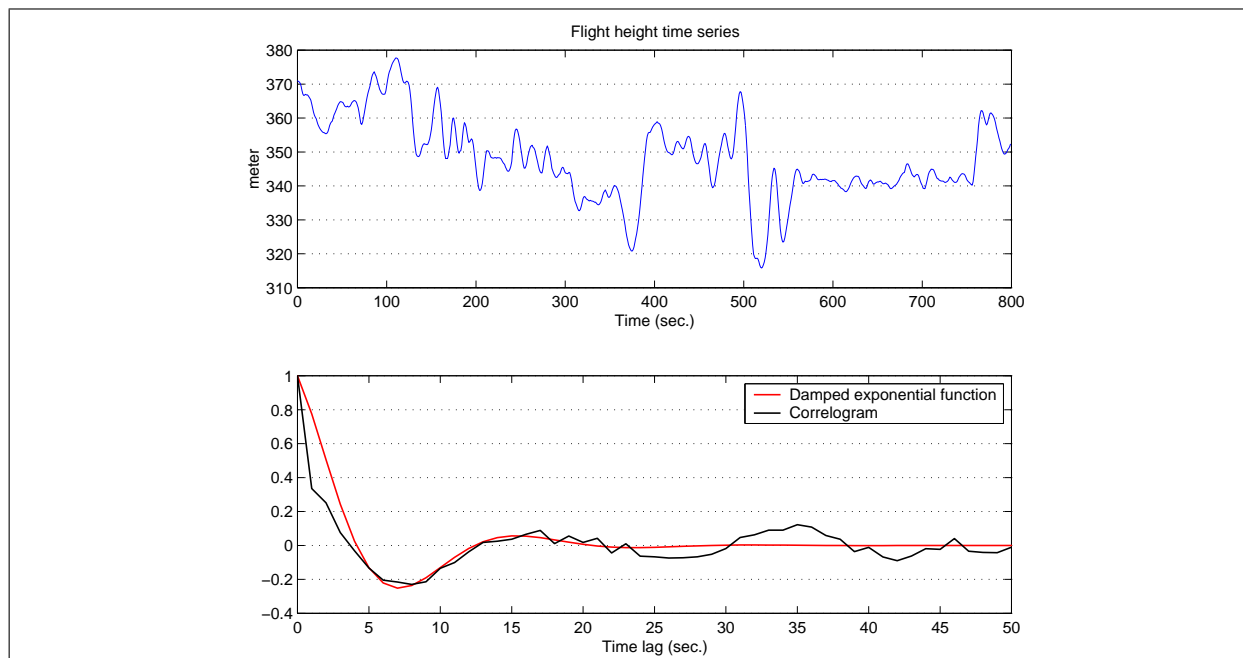


FIG. 4.17 – Série temporelle d'altitude de vol, et fonction d'autocorrélation correspondante. Données fournies par A. Olesen, National Survey and Cadastre - Denmark (KMS).

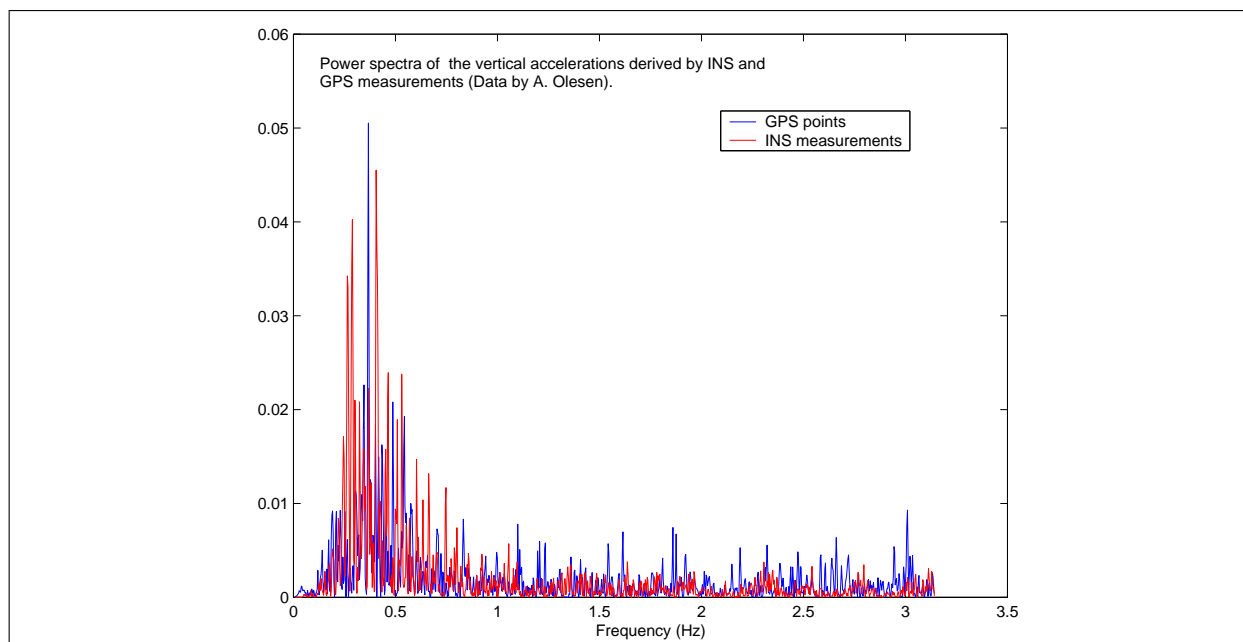


FIG. 4.18 – Spectres de l'accélération verticale de l'avion obtenue suivant deux méthodes : (1) différenciation suivant la méthode de la série de Taylor, (2) mesures accélérométriques INS. Données fournies par A. Olesen, National Survey and Cadastre - Denmark (KMS).

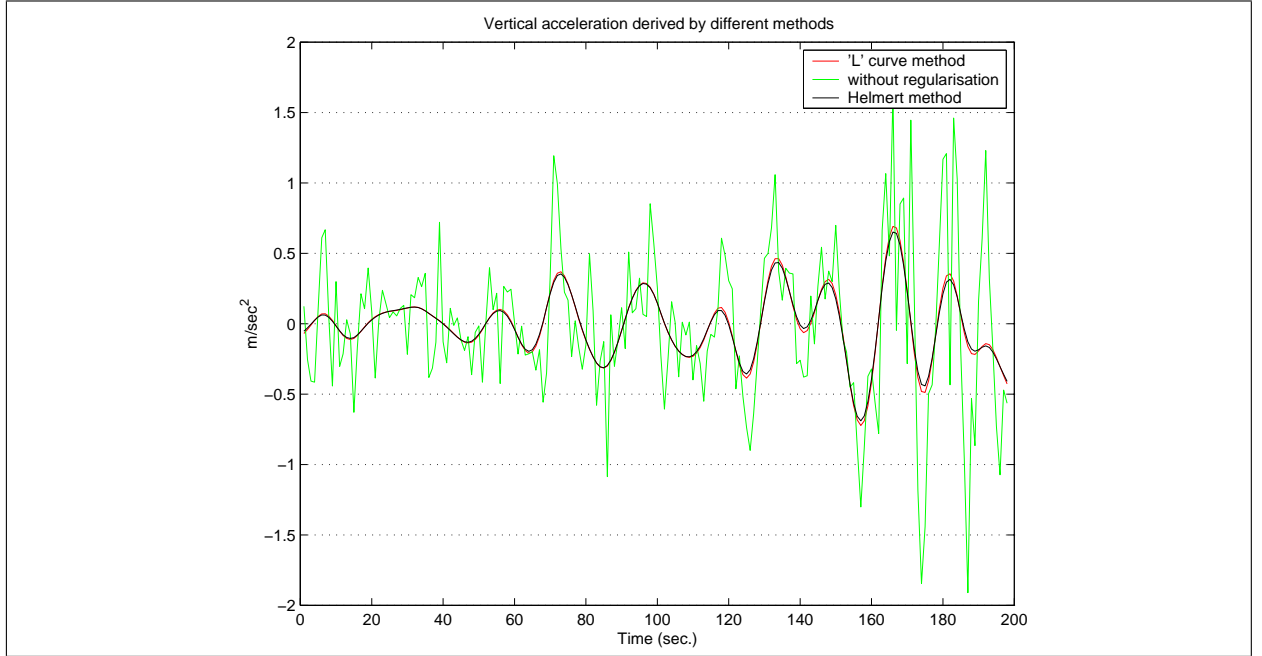


FIG. 4.19 – Accélération verticale calculée selon différentes techniques. La série de données correspond à celle de la Figure 4.17. Voir Annexe E.

4.4.2.3 Accélération verticale ressentie par le capteur gravimétrique, et matrice de covariance associée

L'accélération a_v^* est définie par (4.63). Cette accélération est en fait l'accélération verticale parasite qui "passe" par le système plate-forme et amortisseurs. On peut la calculer à l'aide la fonction de transfert de la plate-forme pour les accélérations verticales. Cette fonction n'est pas donnée par le constructeur. Nous avons modélisé faute de mieux le système comme un ensemble "ressort-masse-amortisseur" avec un degré de liberté¹. Une modélisation similaire à été faite également par Aliod et al. (2003) pour les vibrations hautes fréquence du système gravimétrique.

Le modèle mathématique d'un système de "ressort-masse-amortisseur" correspond à une équation différentielle de deuxième ordre. Rappelons que nous avons également une équation différentielle du deuxième ordre pour le capteur gravimétrique, donnée par (3.37). L'ensemble plate-forme et capteur peut être alors modélisé comme deux systèmes "ressort-masse-amortisseur" liés comme illustré la Figure 4.20.

L'accélération a_v vue par le point T "passe" à travers le premier "ressort-masse-amortisseur". Le point S ressent alors une accélération a_v^* qui sera donnée par la fonction de transfert du premier "ressort-damper". Cette fonction est de la forme :

¹single degree of freedom spring-mass-damper system

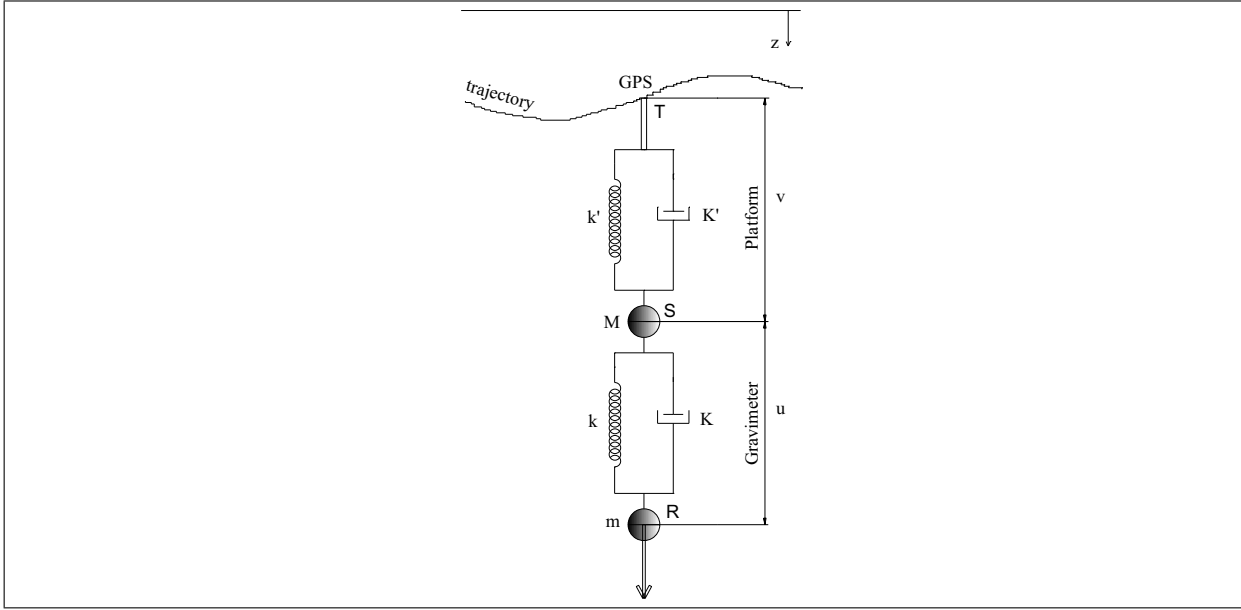


FIG. 4.20 – Nous avons modélisé le système gravimétrique comme deux systèmes "ressort-masse-amortisseur" consécutifs.

$$\begin{aligned}
 Tr(s) &= \frac{\frac{K'}{M}s + \frac{k'}{M}}{s^2 + \frac{K'}{M}s + \frac{k'}{M}} \\
 &= \frac{2f'\omega's + \omega'^2}{s^2 + 2f'\omega's + \omega'^2}
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

En prenant une fréquence naturelle ω' de 0,005 Hz qui correspond à peu près à la fréquence de coupure des filtres généralement appliqués aux données aérogravimétriques, et un coefficient f' égale à celui du capteur, on obtient la fonction de transfert de la Figure 4.21. Les accélérations verticales de l'avion sont fortement filtrées par le système (Figure 4.22). Le filtre correspondant est une convolution de l'entrée avec la fonction de transfert dans le domaine temporel :

$$\begin{aligned}
 a_v^*(t) &= \text{IFT}[Tr(s)] * a_v(t) \\
 &= tr(t) * a_v(t)
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

où $tr(t) = \text{IFT}[Tr(s)]$ est la transformée de Fourier inverse de la fonction de transfert, et '*' est l'opérateur de convolution. L'Equation (4.65) est une expression linéaire qui peut être écrite sous la forme

$$a_v^*(t_k) = \sum_{j=1}^n tr(t_k - t_j) * a_v(t_j) \quad k = 1, 2, \dots, n \tag{4.66}$$

où n est le nombre de points de la série temporelle. On représente cette équation sous la forme matricielle :

$$\mathbf{a}_v^* = \mathbf{N}\mathbf{a}_v \quad (4.67)$$

où

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} tr_1 & tr_n & tr_{n-1} & \cdots & tr_2 \\ tr_2 & tr_1 & tr_n & \cdots & tr_3 \\ tr_3 & tr_2 & tr_1 & \cdots & tr_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ tr_n & tr_{n-1} & tr_{n-2} & \cdots & tr_1 \end{pmatrix}$$

avec $tr_i = tr(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ et

$$\mathbf{a}_v^* = \begin{pmatrix} a_v^*(t_1) \\ a_v^*(t_2) \\ \vdots \\ a_v^*(t_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_v = \begin{pmatrix} a_v(t_1) \\ a_v(t_2) \\ \vdots \\ a_v(t_n) \end{pmatrix}$$

On applique la loi de la propagation de variance :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{a}_v^*} = \mathbf{N}\mathbf{C}_{\mathbf{a}_v}\mathbf{N}^T \quad (4.68)$$

avec :

- $\mathbf{C}_{\mathbf{a}_v}$ matrice de covariance de l'accélération verticale de l'avion,
- $\mathbf{C}_{\mathbf{a}_v^*}$ matrice de covariance de l'accélération verticale ressentie par le capteur.

La matrice de covariance correspondante à l'exemple de la Figure 4.22 est montrée sur la Figure 4.23.

4.4.2.4 Matrice de covariance de l'accélération d'Eötvös

L'accélération d'Eötvös donnée par (3.35) est une fonction de l'azimut de l'avion à chaque instant. Elle dépend de la variation de la latitude et de la longitude de l'avion. La précision des composantes horizontales des positions obtenues par GPS, est bonne (≈ 5 cm). De plus, le changement d'azimut de l'avion sur le trajet, est beaucoup moins fréquent que le changement d'altitude ; ce qui est confirmé par l'analyse spectrale. Par conséquent, nous avons utilisé la simple différentiation selon la méthode de série de Taylor pour le calcul de l'accélération d'Eötvös.

En revanche, le problème du calcul de la matrice de covariance de cette accélération est compliqué, car l'expression (3.35)

$$a_{E\ddot{o}t}(t) = -\left(M(\varphi(t)) + h(t)\right) \left(\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)^2 - \left(N(\varphi(t)) + h(t)\right) \left(2\Omega_T + \frac{d\lambda(t)}{dt}\right) \cos^2(\varphi(t)) \left(\frac{d\lambda(t)}{dt}\right)$$

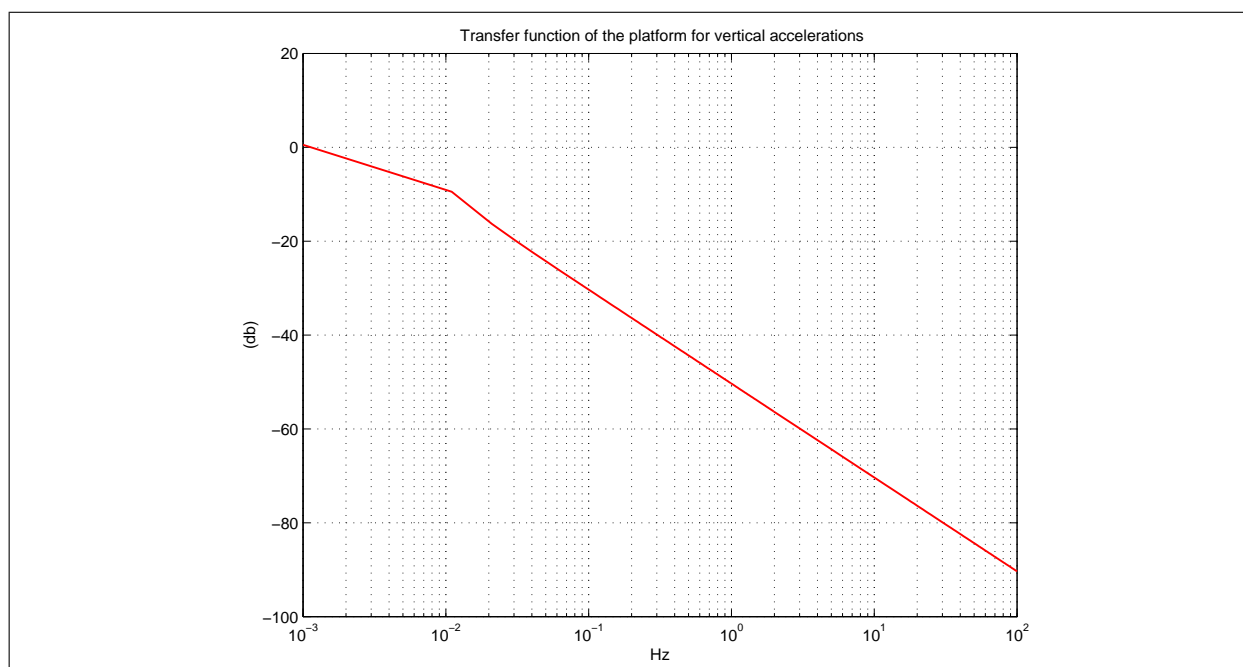


FIG. 4.21 – Fonction de transfert de la plate-forme pour les accélérations verticales

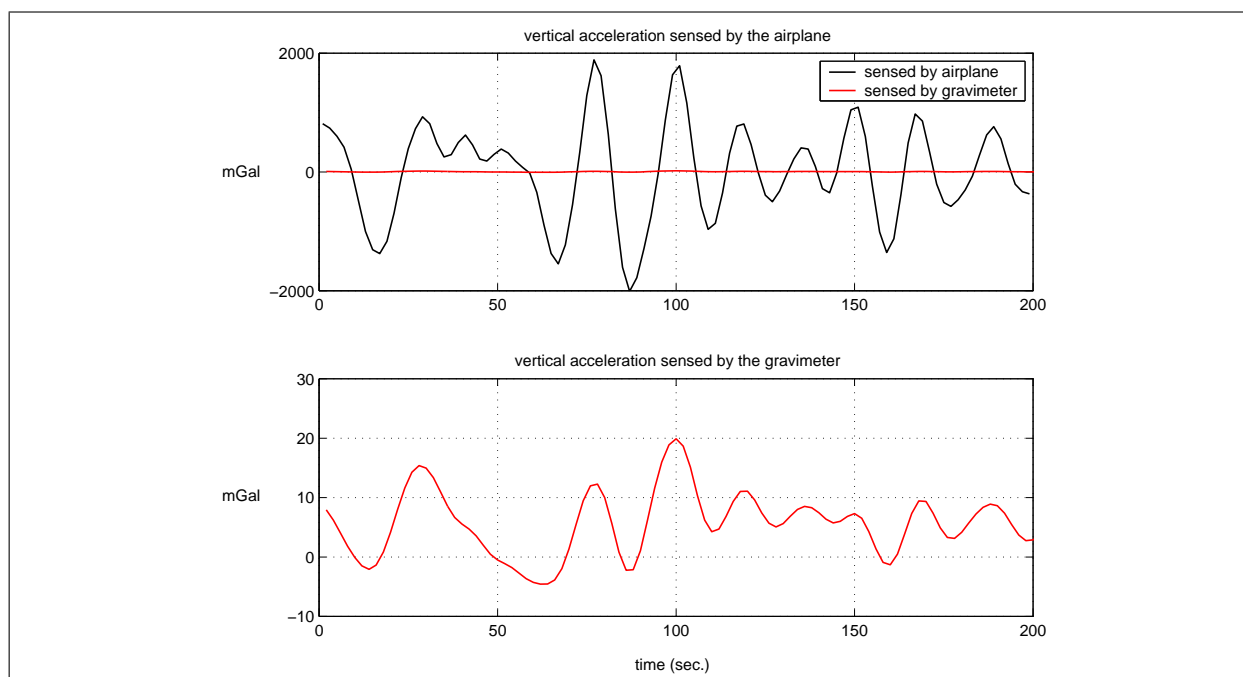


FIG. 4.22 – L'accélération verticale de l'avion est fortement filtrée par les amortisseurs avant d'être "ressentie" par le capteur gravimétrique.

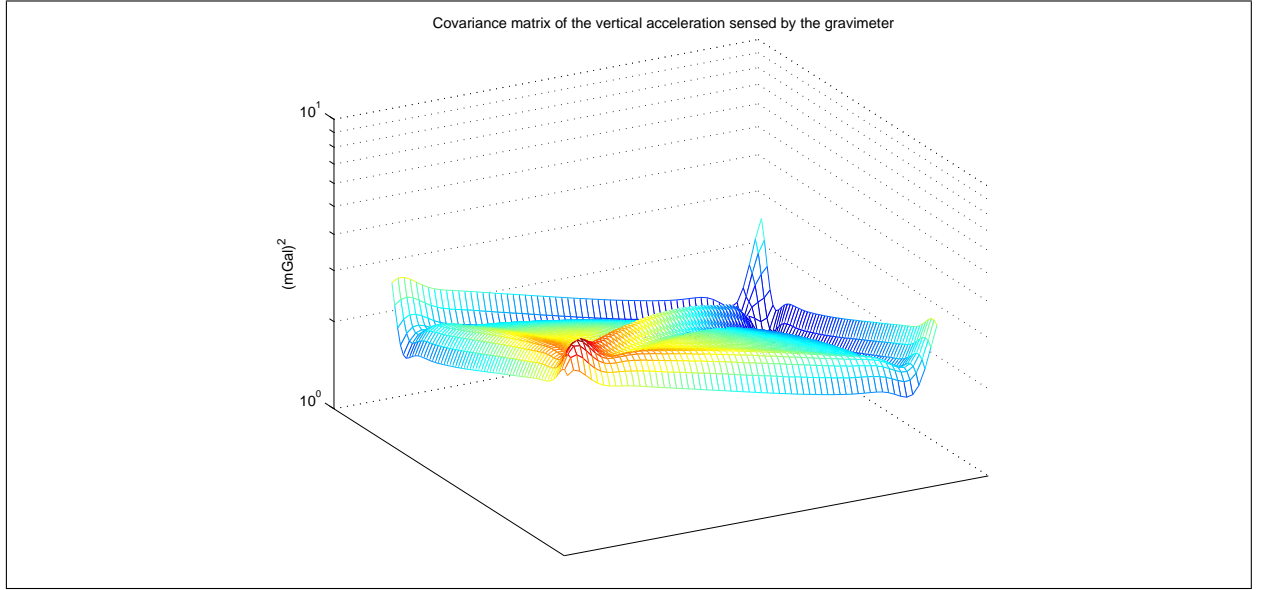


FIG. 4.23 – Matrice de covariance de l'accélération verticale vue par le capteur. Cette matrice correspond à l'exemple de la Figure 4.22.

est non-linéaire par rapport aux paramètres φ , λ et h . Cela implique que pour estimer la matrice de covariance de $a_{E\ddot{o}t}$, il faut linéariser au préalable l'expression (3.35) le long de trajectoire. Mais cette procédure ne peut être faite facilement.

Nous avons utilisé la méthode suivante :

1. On génère les séries temporelles suivantes :

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(t) &= \phi(t) + \epsilon_{\phi}(t) \\ \tilde{\lambda}(t) &= \lambda(t) + \epsilon_{\lambda}(t) \\ \tilde{h}(t) &= h(t) + \epsilon_h(t)\end{aligned}\tag{4.69}$$

où $\epsilon_{\phi}(t)$, $\epsilon_{\lambda}(t)$ et $\epsilon_h(t)$ sont des bruits corrélés, générés à partir de la statistique des données GPS, ou bien selon des méthodes empiriques, telle la méthode du corrélogramme expliquée en Annexe E.

2. On calcule l'accélération d'Eötvös (3.35) avec $\tilde{\phi}$, $\tilde{\lambda}$ et \tilde{h} . Le résultat est dénommé $\tilde{a}_{E\ddot{o}t}$.
3. Différents choix (des "tirages", au sens statistique) de $\epsilon_{\phi}(t)$, $\epsilon_{\lambda}(t)$ et $\epsilon_h(t)$ donnent de nouvelles séries temporelles $\tilde{\phi}$, $\tilde{\lambda}$ et \tilde{h} . En répétant alors l'étape 2, on obtient un ensemble de $\tilde{a}_{E\ddot{o}t}$.
4. La matrice de covariance de cet ensemble est alors une approximation de la matrice de covariance de l'accélération d'Eötvös.

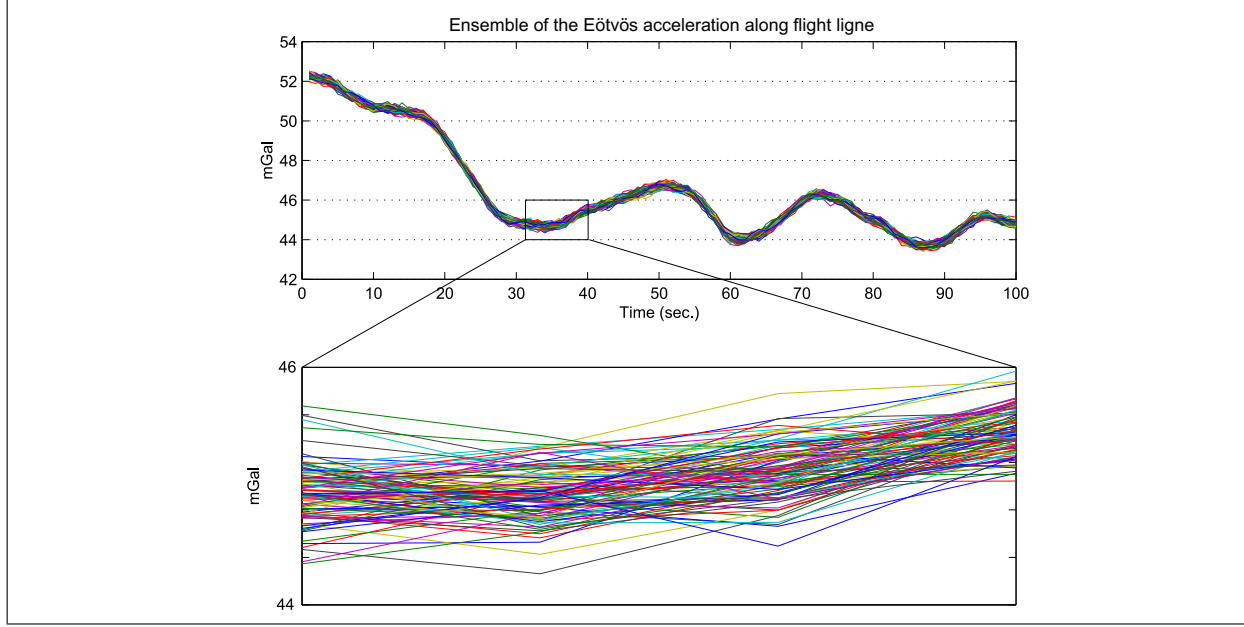


FIG. 4.24 – Ensemble des accélérations d'Eötvös calculées à partir de différentes générations des bruits. Pour cette figure, un bruit de type auto-régressif AR1 avec 90% de corrélation a été considéré.

4.4.2.5 Matrice de covariance des grandes longueurs d'onde de perturbation de gravité

Les coefficients des modèles du géopotential sont légèrement erronés, et cette erreur se propage bien sûr à travers la série d'harmoniques sphériques. Pour les grandes longueurs d'ondes de la perturbation de gravité, utilisées dans notre modélisation, cette erreur sera prise en compte selon le concept de *variance par degré de l'erreur*¹ expliqué ci-après.

La fonction de covariance du potentiel perturbateur T entre deux point P et Q est donnée par [Moritz (1980), p. 169]

$$\begin{aligned} C(T(P), T(Q)) &= K(P, Q) \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} k_j \left(\frac{R^2}{rr'} \right)^{j+1} P_j(\cos \psi) \end{aligned} \quad (4.70)$$

Les paramètres de cette équation sont identiques à ceux des Equations (4.51) et (4.52). Nous avons également $\delta g = -\partial T / \partial r$. En appliquant la loi de la propagation de covariance à (4.70) nous avons

$$\begin{aligned} C(\delta g(P), \delta g(Q)) &= \left(-\frac{\partial}{\partial r} \right) \left(-\frac{\partial}{\partial r'} \right) K(P, Q) \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} k_j (j+1)^2 \frac{1}{rr'} \left(\frac{R^2}{rr'} \right)^{j+1} P_j(\cos \psi) \end{aligned} \quad (4.71)$$

¹Error degree variance

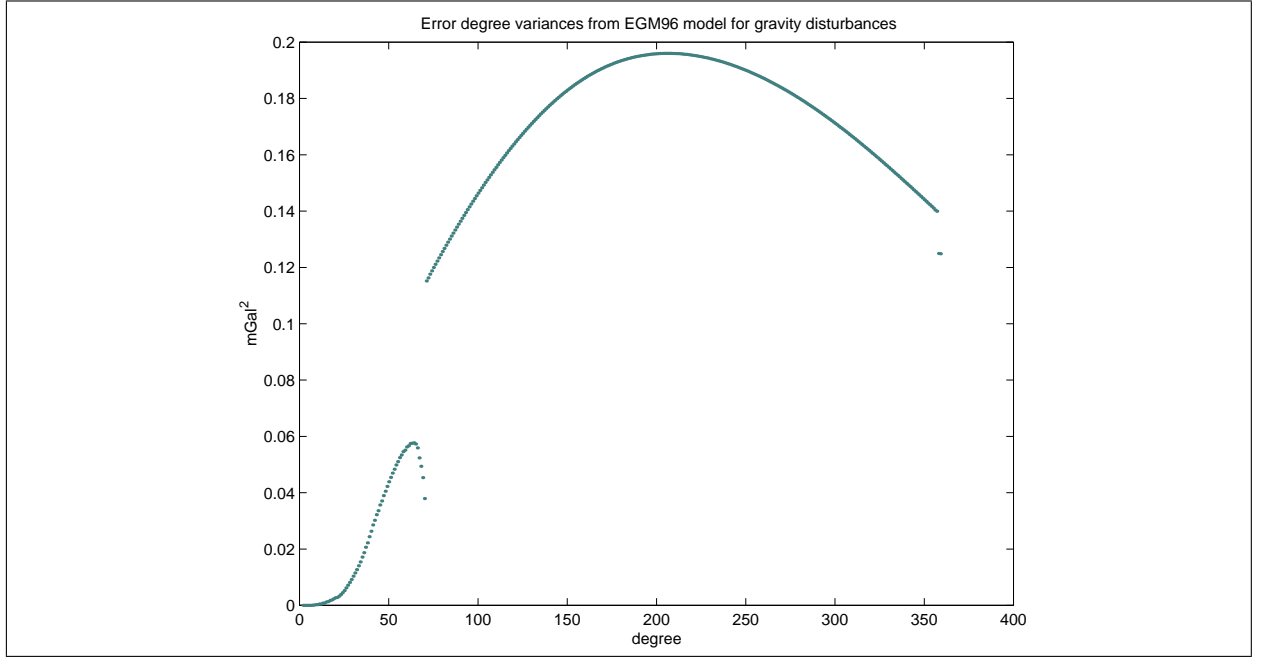


FIG. 4.25 – Degré variance de l'erreur sur les coefficients du modèle géopotential EGM96. On remarque le hiatus au passage des données satellites aux données sol.

Par l'intégration de (4.26) sur l'ensemble de la sphère, et en utilisant l'orthogonalité des harmoniques sphériques, pour $r = r' = R$ les k_j sont donnés par

$$k_j = \left(\frac{GM}{R}\right)^2 \sum_{m=0}^j (\Delta C_{jm}^2 + \Delta S_{jm}^2) \quad (4.72)$$

où les ΔC_{jm} et ΔS_{jm} sont les coefficients du potentiel perturbateur.

Les k_j sont par définition les *variances par degré*. Considérant l'erreur sur les coefficients ΔC_{jm} et ΔS_{jm} nous avons également

$$k'_j = \left(\frac{GM}{R}\right)^2 \sum_{m=0}^j (\sigma_{C_{jm}}^2 + \sigma_{S_{jm}}^2) \quad (4.73)$$

où $\sigma_{C_{jm}}^2$ et $\sigma_{S_{jm}}^2$ sont des variances des coefficients des harmoniques sphériques, données ancillaires fournies avec les modèles de géopotentiels. Les k'_j sont des *variances par degré de l'erreur*. L'erreur cumulée (ou totale) sur la perturbation de gravité due à $\sigma_{C_{jm}}^2$ et $\sigma_{S_{jm}}^2$ est calculée par

$$\begin{aligned} \sigma_{\delta g}^2 &= \sum_{j=2}^{\infty} \sigma_j^2 \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{GM}{R^2}\right)^2 (j+1)^2 \sum_{m=0}^j (\sigma_{C_{jm}}^2 + \sigma_{S_{jm}}^2) \end{aligned} \quad (4.74)$$

Les σ_j^2 pour le modèle EGM96 sont données sur la Figure 4.25. Pour les grandes longueurs d'ondes de la perturbation de gravité, il faut calculer la somme (4.74) jusqu'au degré de troncature L de la série, qui dépend des dimensions de la région de mesure. Par exemple pour $L = 45$, $\sigma_{\delta g}^2$ vaut $0,45 \text{ mGal}^2$ et pour $L = 70$, $\sigma_{\delta g}^2 = 1,78 \text{ mGal}^2$. Cette erreur est donc importante pour des levés aérogravimétriques couvrant de petites régions.

4.5 Ajustement des valeurs de la gravité aux points de croisement

Les lignes de vol d'un levé aérogravimétrique sont généralement croisées pour avoir un contrôle de recouvrement sur les données. La différence des perturbations de gravité aux points de croisement est une quantité qui est traditionnellement utilisée comme un indicateur de la qualité intrinsèque du levé.

Quelque soit la méthode de filtrage utilisée, le résultat final montre parfois un décalage systématique des valeurs calculées le long d'un profil par rapport aux autres profils. Ce décalage est probablement dû à une erreur de mesure initiale sur la tension du ressort (quantité S_0 en (3.37)) à l'aéroport. Nous observons aussi une dérive sur les profils qui est majoritairement due à la dérive du gravimètre.

La seule façon de corriger ces biais est de faire un ajustement des valeurs de la gravité le long de profils à l'aide des écarts calculés aux points de croisement. Différentes méthodes d'ajustement ont été proposées dans la littérature. Nous avons appliqué la méthode introduite par Mittal (1984) :

Soient L_i et L_j deux lignes de vol croisées au point C . On défini

$$\Delta\delta g_{ij}(C) = \delta g_{L_i}(C) - \delta g_{L_j}(C) \quad (4.75)$$

avec :

$\delta g_{L_i}(C)$ perturbation de gravité au point C sur la ligne L_i ,
 $\delta g_{L_j}(C)$ perturbation de gravité au point C sur la ligne L_j .

Soit K_i le nombre des croisements de la ligne L_i avec les lignes L_m , $m = 1, 2, \dots, K_i$. On défini

$$W_i = \frac{K_i}{\sum_{m=1}^{K_i} (\Delta\delta g_{im})^2} \quad (4.76)$$

et

$$W_i^* = W_i \frac{N}{\sum_{i=1}^N W_i} \quad (4.77)$$

où N est le nombre total des croisements sur le réseau. Il est facile à vérifier que

$$\frac{\sum_{i=1}^N W_i^*}{N} = 1$$

On calcule la moyenne pondérée des δg pour chaque point de croisement par

$$\delta g_{ij}(C) = \frac{\delta g_{L_i}(C)W_i^* + \delta g_{L_j}(C)W_j^*}{W_i^* + W_j^*} \quad (4.78)$$

La correction à appliquer sur les δg au point C est

$$\varepsilon_i(C) = \delta g_{ij}(C) - \delta g_{L_i}(C) \quad (4.79)$$

pour la ligne L_i , et

$$\varepsilon_j(C) = \delta g_{ij}(C) - \delta g_{L_j}(C) \quad (4.80)$$

pour la ligne L_j . On obtient ainsi le long de chaque ligne, des valeurs de $\varepsilon_i(C_m)$, $m = 1, 2, \dots, K_i$. On peut ajuster un modèle linéaire aux valeurs de $\varepsilon_i(C_m)$ en fonction d'un paramètre, comme le temps de mesure. Ainsi, on estime le décalage constant et la dérive temporelle de chaque ligne. Cette méthode est applicable aux résultats obtenus après le filtrage.

Pourtant, notre méthode développée en Section 4.3, nous donne la possibilité d'ajouter des inconnues supplémentaires, et d'estimer les perturbations de gravité inconnues en même temps que des paramètres systématiques de biais. Si on considère un modèle linéaire $a_{L_i} + b_{L_i}t$ pour les biais systématiques correspondants à la ligne i , nous aurons deux inconnues supplémentaires pour chaque ligne de vol, ce qui rend le système (4.37) sous-déterminé¹, car le nombre des inconnus devient $(n - 2) + 2 \times K$, plus grand que le nombre total des équations $(n - 2)$. On rappelle que n est le nombre total des inconnues et que K est le nombre total des lignes de vol. Mais on peut encore résoudre ce système d'équation par moindres carrés en ajoutant des équations de contraintes aux points de croisement.

Le développement mathématique de ces équations de contraintes est présenté en Annexe F. Reprenons par exemple le modèle quadratique (F.23) présenté dans cette Annexe :

$$\mathbf{B}_2 \mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{e}' \quad (4.81)$$

Ces équations supplémentaires transforment le système d'équation à résoudre en

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} \quad (4.82)$$

$$\implies \mathbf{D} \mathbf{x} = \mathbf{L} + \mathbf{e}' \quad (4.83)$$

Une solution similaire à (4.42) pour (4.83) est alors

$$\hat{\mathbf{x}} = (\hat{\sigma}_{0,\mathbf{L}}^{-2} \mathbf{D}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{L}}^{-1} \mathbf{D} + \hat{\sigma}_{0,\mathbf{x}}^{-2} \mathbf{Q}_{\mathbf{x}}^{-1})^{-1} \hat{\sigma}_{0,\mathbf{L}}^{-2} \mathbf{D}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{L}}^{-1} \mathbf{L} \quad (4.84)$$

$$= (\mathbf{D}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{L}}^{-1} \mathbf{D} + \mu^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{x}}^{-1})^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{L}}^{-1} \mathbf{L} \quad (4.85)$$

avec

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{\mathbf{y}} & \mathbf{Q}_{\mathbf{y},\mathbf{b}} \\ \mathbf{Q}_{\mathbf{b},\mathbf{y}} & \mathbf{Q}_{\mathbf{b}} \end{pmatrix}$$

Nous avons également la matrice de covariance a posteriori des inconnues :

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{x}}} = (\hat{\sigma}_{0,\mathbf{L}}^{-2} \mathbf{D}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{L}}^{-1} \mathbf{D} + \hat{\sigma}_{0,\mathbf{x}}^{-2} \mathbf{Q}_{\mathbf{x}}^{-1})^{-1} \quad (4.86)$$

¹under-determined

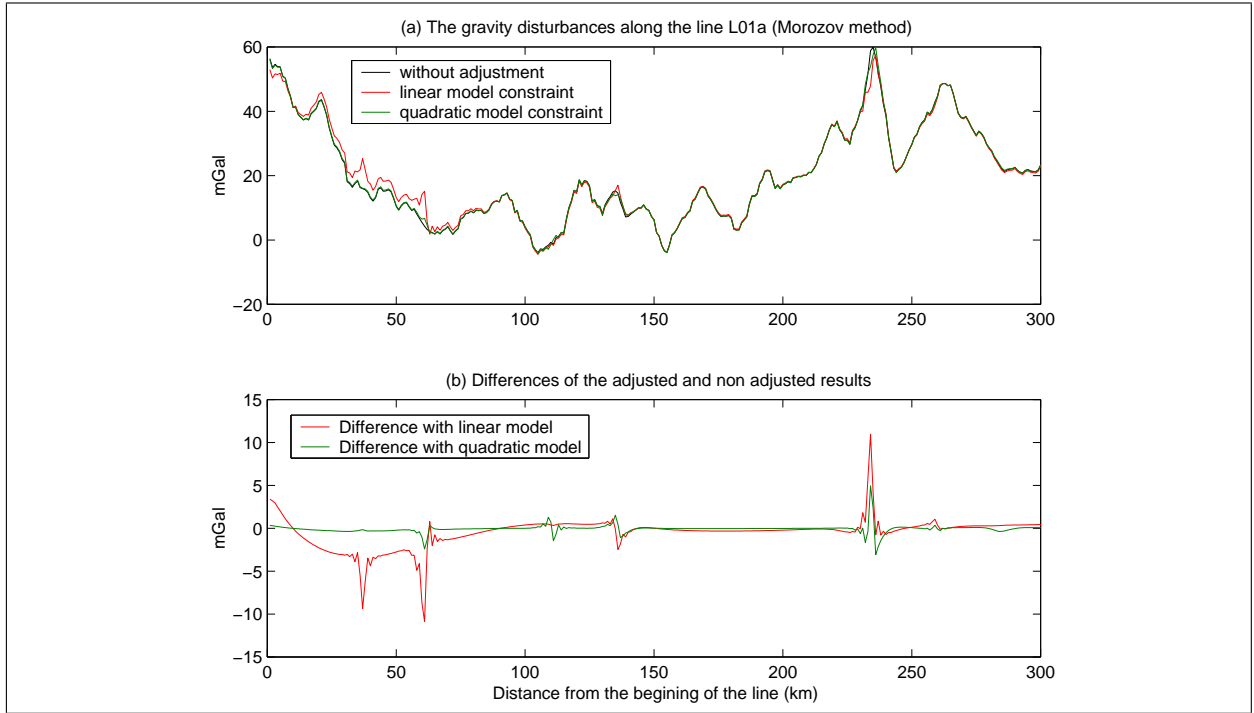


FIG. 4.26 – Les équations de contraintes aux points de croisement ont été imposées à la solution au sens des moindres carrés. (a) Perturbation de gravité le long de la ligne L01a pour différents modèles, (b) différence des modèles linéaire et quadratique de réduction des écarts aux nœuds avec la solution sans réduction des écarts. Les pics correspondent aux points de croisement.

On rencontre une fois de plus les problèmes qu'on avait déjà traités pour estimer la matrice de covariance des inconnues, les facteurs de variances, ainsi que la matrice de covariance liée aux observations. Un point important à noter ici est que la matrice de "cross-correlation" $\mathbf{Q}_{y,b}$ n'est pas zéro, car l'altitude de vol apparaît dans les deux vecteurs \mathbf{y} et \mathbf{b} . Cependant faute de pouvoir l'apprécier, nous avons considéré cette matrice identique à zéro.

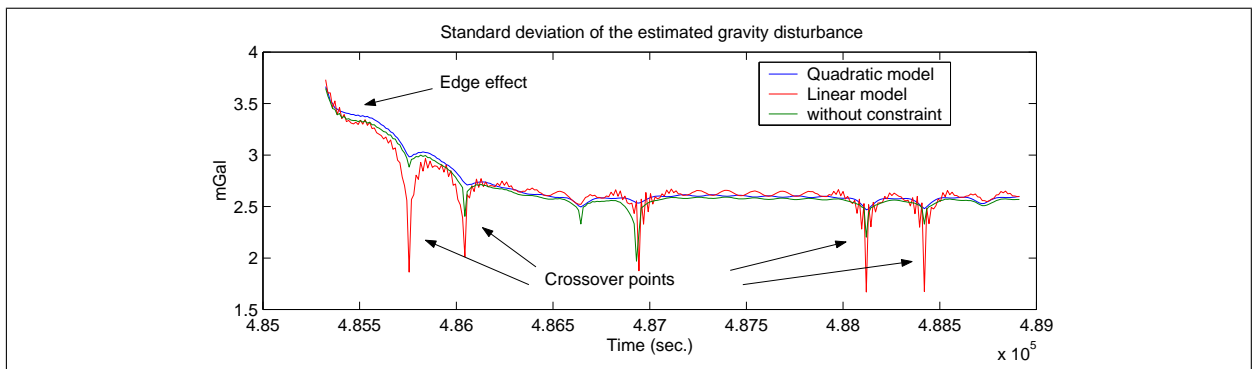


FIG. 4.27 – Ecart type estimé le long de la ligne L01a pour différents types d'équations de contraintes.

Nous avons appliqué cette technique de réduction des écarts aux nœuds sur les données du levé aérogravimétrique des Alpes. La Figure 4.26 montre le résultat pour la ligne de vol L01a. L'apport de ces équations est sensible autour des points de croisement. Les modifications sur la solution avec le modèle linéaire sont plus importantes qu'avec le modèle quadratique. Mais en l'absence d'une solution de référence il est difficile de conclure quelle est la méthode la plus adaptée. En outre, une amélioration est observée au niveau des écarts types estimés de la solution. Pourtant, nous ne pouvons pas affirmer que cette amélioration est significative d'un point de vue physique, car la Figure 4.27 indique que l'effet est essentiellement local autour des points de croisement.

On pourrait bien sûr aller au delà du modèle quadratique (degré 3, 4, etc.) mais il est difficile d'inférer la signification physique d'une tel accroissement du degré. L'application d'une matrice non nulle $\mathbf{Q}_{y,b}$ pourrait aussi améliorer significativement le résultat.

LE LEVÉ AÉROGRAVIMÉTRIQUE SUR LES ALPES OCCIDENTALES

Ce chapitre est repris de la thèse de Verdun (2000), y compris en ce qui concerne les figures.

Dans le cadre du programme GéoFrance 3D¹ Alpes initié par le CNRS² et le BRGM³, un levé gravimétrique aéroporté a été réalisé du 1er au 20 février 1998 sur les Alpes françaises impliquant à la fois le Laboratoire de Géophysique et Tectonique (UMR CNRS 5573), l'Université de Montpellier, le Laboratoire de Géodésie et de Géodynamique de ETH Zurich (Suisse) et la société de prospection géophysique LaCoste & Romberg (États-Unis).

L'opération a consisté à mesurer le champ de pesanteur en vol à une altitude de 5100 *m* au dessus de la chaîne. Le gravimètre utilisé a été un gravimètre de type LaCoste&Romberg Air/Sea modèle SA, expliqué en détail au Chapitre 2. Le système de positionnement relatif par GPS ainsi que le système INS ont été utilisés pour fournir les données trajectographiques. Ces deux systèmes sont aussi étudiés au Chapitre 2. Le chapitre détaille les principales caractéristiques du levé alpin.

5.1 Situation géographique du levé

La Figure 5.1 montre la surface couverte par le levé aérogravimétrique alpin. Le levé a couvert la majeure partie des Alpes françaises, en débordant également sur la Suisse au Nord et l'Italie à l'Est. Pour couvrir cette région, au total 18 ligne Nord-Sud (L01a à L18a) et 18 lignes Est-Ouest (T01a à T18a) étaient prévues (Figure 5.2). Considérant les heures de vol disponibles pour réaliser le projet ainsi que les conditions météorologiques, les lignes de vol effectuées ne sont pas exactement celles qui étaient prévues (Figure 5.3).

¹Le programme GéoFrance 3D visait à produire une cartographie tri-dimensionnelle du sous-sol français.

²Centre National de la Recherche Scientifique

³Bureau de Recherches Géologiques et Minières

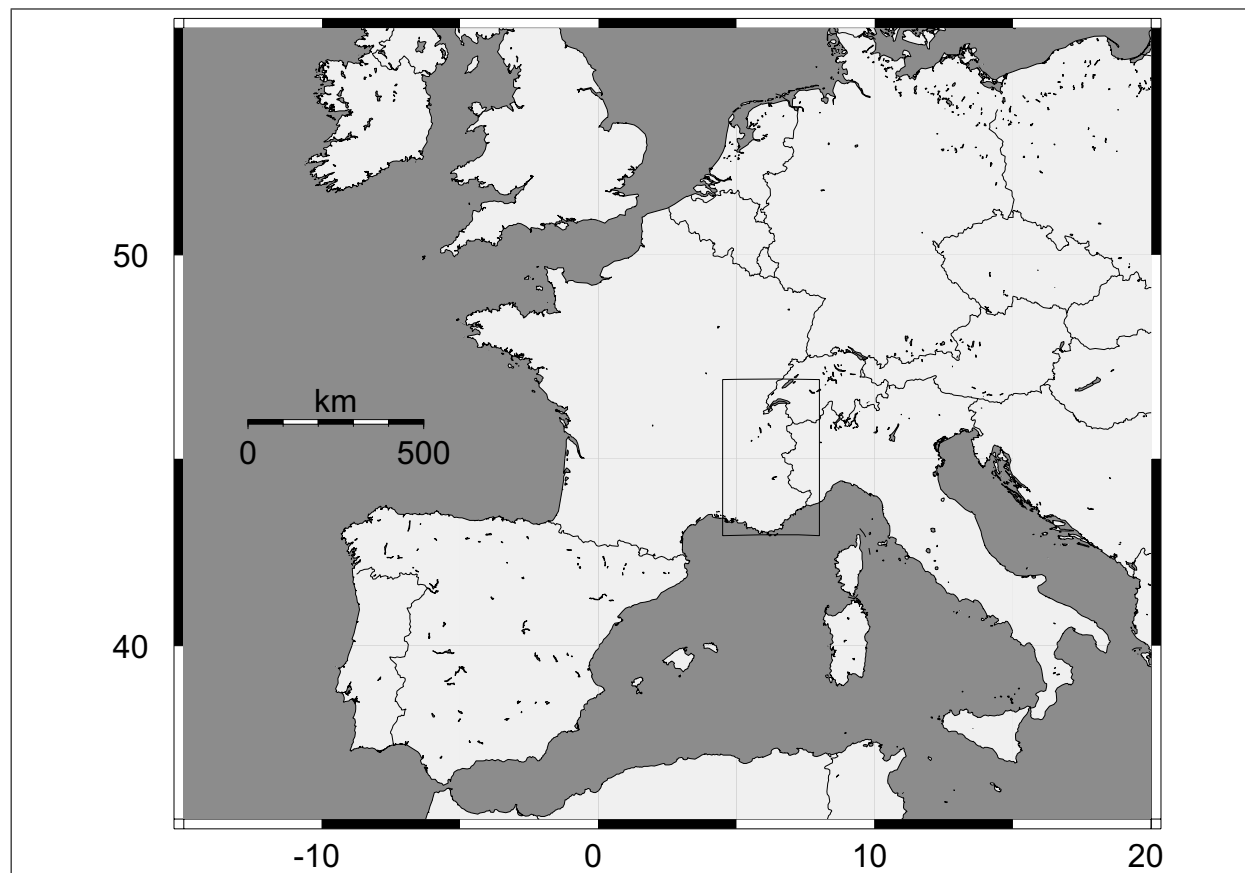


FIG. 5.1 – Situation géographique du levé aérogravimétrique sur les Alpes Occidentales

Quelques statistiques de ce levé sont présentées dans le Tableau 5.1.

5.2 L'avion

Les vols ont été réalisés à bord d'un *DeHavilland Twin Otter* (cf. Figure 5.4), propriété du Ministère de la Justice suisse, et piloté par des officiers de l'armée de l'air. Cet appareil est utilisé habituellement pour la surveillance aéroportée des forêts ou la photogrammétrie. Il est équipé d'un système de navigation comprenant un récepteur GPS LORAN Trimble 2000, et d'un pilotage automatique Collins, type AP 106, pour le vol stabilisé.

Cet avion peut atteindre la vitesse maximale de 335 km/h soit 93 m/sec . Il peut monter jusqu'à 8140 m d'altitude en charge. Sa charge maximale est de 2350 kg et son autonomie de vol est de 5 heures .

TAB. 5.1 – Quelques statistiques du levé aérogravimétrique des Alpes Occidentales

latitude	entre 43°30' et 46°45'
longitude	entre 5° et 7°30'
surface totale couverte	57800 km^2
nombre des lignes Nord-Sud prévues	18
nombre des lignes Nord-Sud réalisées	18
nombre des lignes Est-Ouest prévues	18
nombre des lignes Est-Ouest réalisées	16
distance moyenne entre les lignes Nord-Sud	10 km
distance moyenne entre les lignes Est-Ouest	20 km
longueur totale des lignes réalisées	10000 km
altitude moyenne de vol	5100 m
durée de vol effective	50 <i>heures</i>
durée totale du levé	9 <i>jours</i>

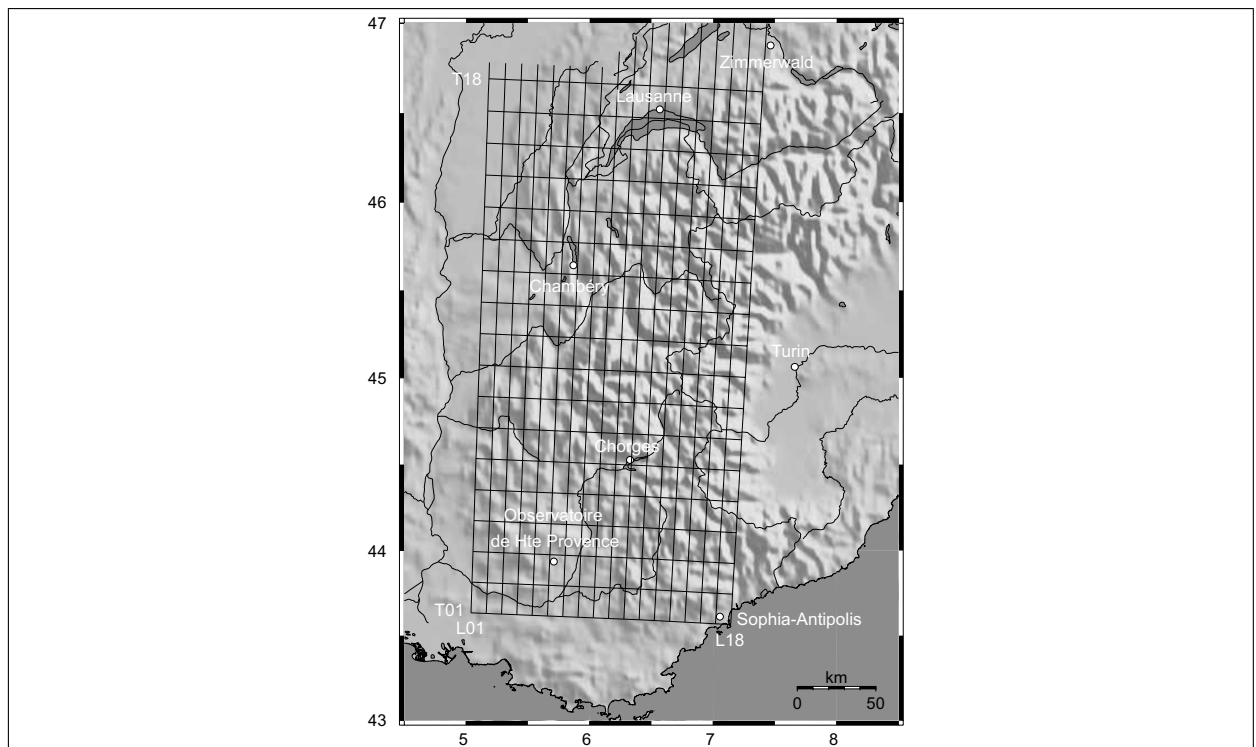


FIG. 5.2 – Lignes de vol prévues pour le levé aérogravimétrique des Alpes Occidentales

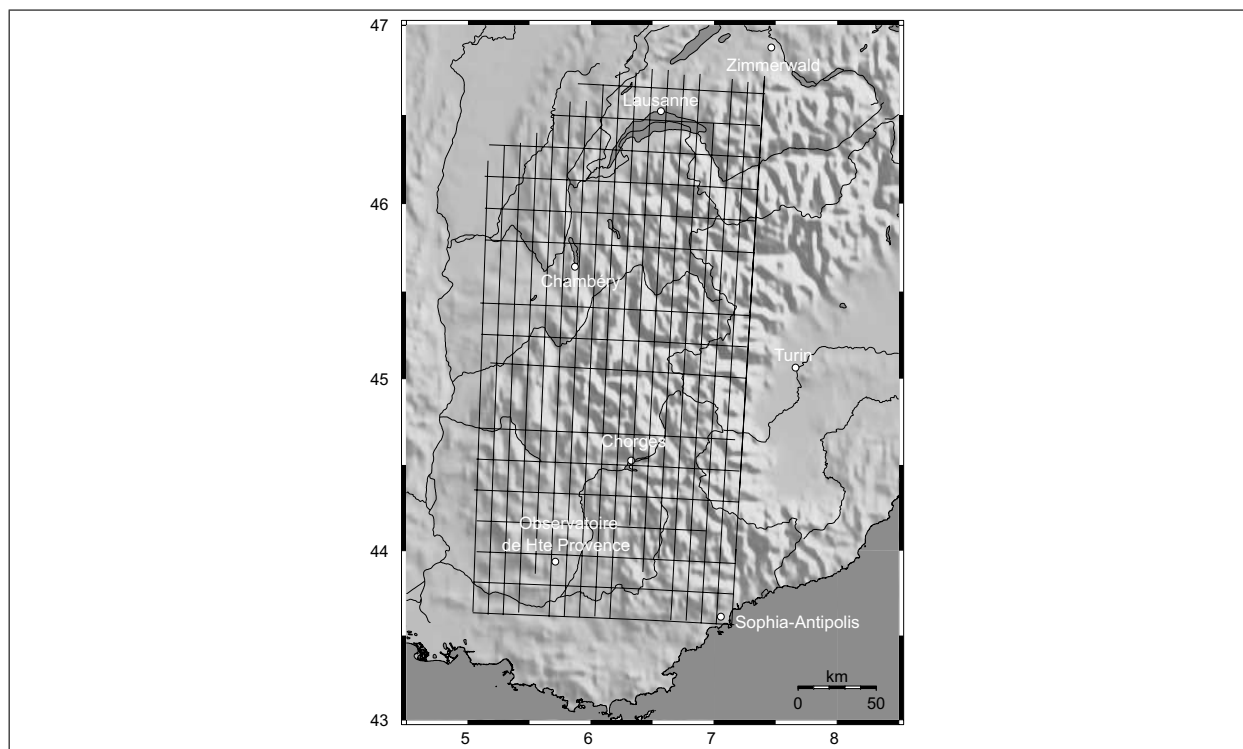


FIG. 5.3 – Lignes de vol réalisées. Les stations GPS sont également marquées sur la carte.



FIG. 5.4 – L'avion *Twin Otter* qui a été utilisé pour le levé

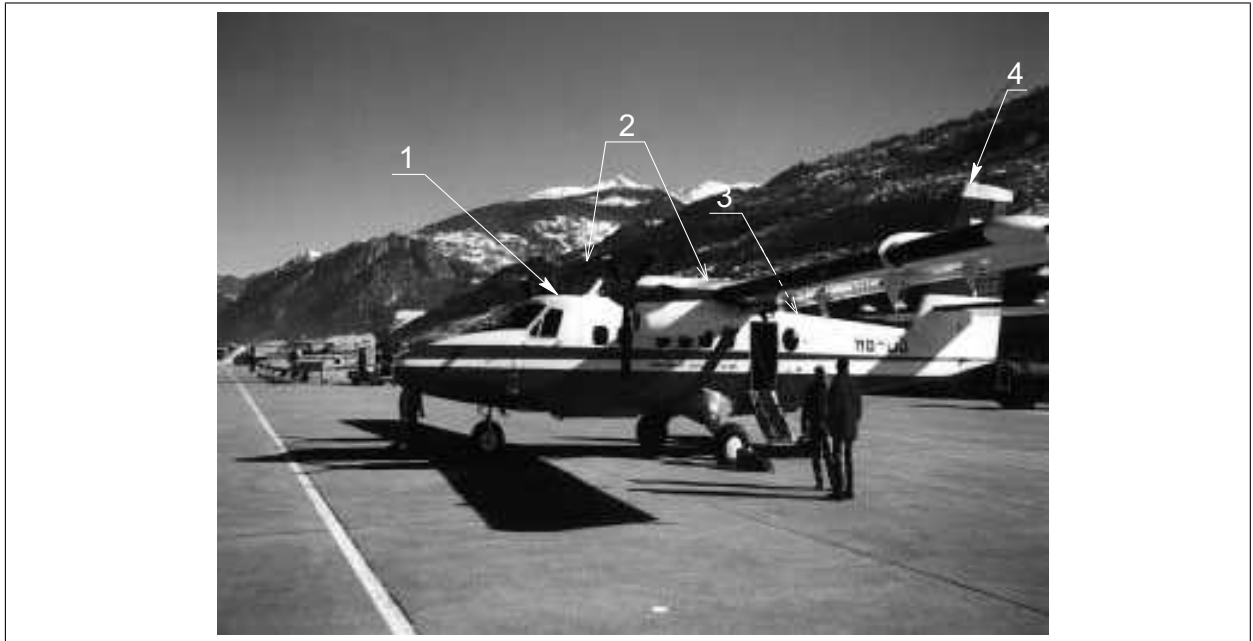


FIG. 5.5 – Antennes GPS installées sur l'avion. (1=Antenne de tête, 2=Antennes d'ailes (2), 3=Antenne de toit, 4=Antenne de queue).

5.3 Trajectographie de l'avion

Comme il a été expliqué en détail dans le Chapitre 2, la trajectographie est faite par le GPS et INS. Les caractéristiques de ces deux types de mesures effectuées lors du levé Alpin sont expliqués ci-après.

5.3.1 Positionnement de l'avion par GPS

5.3.1.1 Récepteurs embarqués

La Figure 5.5 montre la configuration des antennes GPS installées sur l'avion. Au total cinq antennes GPS ont été installées. Cette configuration nous permet d'avoir les angles d'attitude de l'avion à chaque instant. Considérant que le gravimètre est posé sur une plate-forme stabilisée, les angles d'attitudes servent à calculer la correction due à l'imperfection du nivellement de la plate-forme (cf. Section 2.3), ou la correction du bras de levier (cf. Section 3.3). Si on considère que ces deux corrections sont petites, une seule antenne devrait suffire pour les calculs gravimétriques. Dans ce cas, l'avantage d'avoir plusieurs antennes embarquées est que si l'antenne principale tombe en panne ou en cas d'erreurs grossières, comme des sauts de cycle, les données des autres antennes peuvent être utilisées.

Les récepteurs installés sur l'avion ne sont pas de tous du même type. Le Tableau 5.2 présente les types des différents signaux collectés par les récepteurs embarqués.

TAB. 5.2 – Signaux collectés par les différents récepteurs de l'avion

Position de l'antenne	Signaux collectés
Ailes	Codes et phase sur L1
Tête	Codes et phase sur L1 et L2
Queue	Codes et phase sur L1
Toit	Codes et phase sur L1 et L2

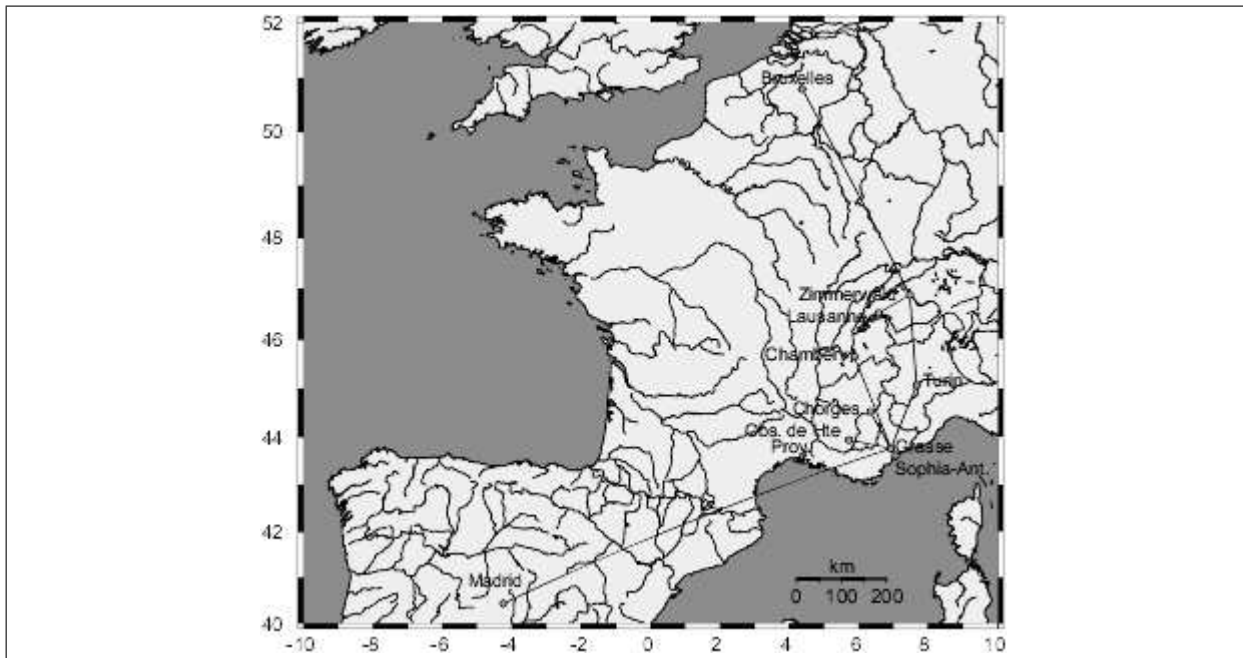


FIG. 5.6 – Stations GPS terrestres. Les stations Chambéry, Chorges, Observatoire de Haute Provence, Sophia-Antipolis, Lausanne et Turin ont été repérées pendant la campagne. Les stations de référence, appartenant au réseau mondial IGS, utilisées pour établir le réseau terrestre sont : Bruxelles, Grasse, Madrid et Zimmerwald.

5.3.1.2 Réseau de stations terrestres GPS

Un réseau de stations terrestres a été établi. Ce réseau est présenté sur la Figure 5.6. Au total sept stations ont été observées pendant la campagne. Les mesures ont été ensuite combinées à celle des stations de référence mondial IGS. Le nombre suffisant de stations et leur répartition dans le réseau, permet d'avoir au moins une station proche de l'avion pendant la mesure.

5.3.1.3 Stratégie du positionnement des points

Le logiciel *Bernese*, version 4.0 [Rothacher et Mervart (1996)] a été utilisé pour traiter les données GPS des stations terrestres. Le principe du traitement est basé sur la résolution

TAB. 5.3 – Performances et caractéristiques de la centrale inertielle de navigation IMAR "Inertiale Mess Automatisierungs und Regelsysteme"

Grandeur acquise	Gamme de mesure	Résolution
Accélérations	$\pm 5 \text{ g}$	$0,05 \times 10^{-3} \text{ g}$
Angles (roulis, tangage et azimuth)	Aucune limite	$0,001^\circ$
Vitesses angulaires	$\pm 800^\circ/\text{s}$	$0,001^\circ/\text{s}$

Dérive des gyroscopes	$< 3^\circ/\text{h}$
Écart de linéarité	$< 0,05\%$

d'un système d'équations d'observations qui relient les doubles différences de phase aux distances inconnues, ainsi qu'aux ambiguïtés de phase. Le résultat obtenu correspond à la meilleure estimation de la solution du système au sens des moindres carrés (cf. Section 2.1, Equation 2.11).

A partir des combinaisons ionosphere-free L3 de mesures de phase, les solutions journalières de l'ensemble du réseau ont été déterminées selon le processus de moindres carrés. Pour neuf jours de mesure, l'écart type des positions obtenues, ne dépasse pas 5 mm . Les coordonnées attribuées aux points, sont des valeurs moyenne de ces solutions journalières. Les stations fixes sur le réseau, sont les quatre stations du réseau mondial IGS (Bruxelles, Grasse, Madrid et Zimmerwald) dont les coordonnées sont données avec une écart-type de $< 0,01 \text{ mm}$.

Pour les mesures cinématiques, le logiciel préparé par Cocard (1995) a été utilisé. Ce logiciel n'est pas capable de traiter les données de l'ensemble des antennes installées sur l'avion. Il est seulement capable de traiter les mesures d'une seule antenne GPS en mouvement. Les angles d'attitudes de l'avion doivent être alors calculées séparément. Comme nous n'avons pas appliqué les corrections de nivellement et de bras de levier, nous avons seulement besoin des coordonnées de l'antenne la plus proche du gravimètre, qui est située à la tête de l'avion.

5.3.2 La centrale inertielle de navigation

Une centrale inertielle de navigation à axes liés (strapdown INS), du type IMAR "Inertiale Mess Automatisierungs und Regelsysteme" a été montée sur l'avion. Le fonctionnement de cet appareil a été expliqué à la Section 2.2. Il peut être utilisé comme système indépendant de mesure gravimétrique. Les différentes grandeurs acquises par la centrale sont rassemblées dans le Tableau 5.3. Cet appareil est tombé en panne durant la campagne et nous ne disposons donc pas de ces mesures gyroscopiques et accélérométriques.

RÉSULTATS NUMÉRIQUES ET VALIDATIONS ASSOCIÉES

Les principales étapes du traitement des données aérogravimétriques acquises avec un gravimètre LaCoste & Romberg ont été expliquées au Chapitre 4. Les méthodes proposées ont été appliquées sur les données du levé aérogravimétrique des Alpes, brièvement introduit au chapitre précédent. Le présent chapitre comporte deux parties : le traitement des données et la validation des résultats. Le traitement consiste en

1. pré-traitement des mesures,
2. calcul de la perturbation de gravité par l'équation différentielle simplifiée du gravimètre (3.32),
3. calcul de la perturbation de gravité par l'équation différentielle non simplifiée du gravimètre (3.37),
4. calcul de la perturbation de gravité par la méthode d'inversion de l'équation intégrale du gravimètre au sens des moindres carrés

La validation est faite par comparaison des perturbations de gravité calculées, avec les anomalies de gravité disponibles au sol, prolongées à l'altitude de vol, corrigées de l'effet de la topographie. Les écarts type obtenus a posteriori par moindres carrés ainsi que les écarts aux points de croisement, sont appelés critères internes de la précision des résultats.

6.1 Pré-traitement

6.1.1 Histogrammes des paramètres

Une façon simple pour vérifier le comportement des différents signaux et identifier d'éventuelles erreurs grossières, est l'analyse des histogrammes associés. Les paramètres que nous allons vérifier sont les différents termes de l'équation différentielle du capteur gravimétrique (3.37) :

$$\frac{d^2 B}{dt^2} + 2\lambda\omega \frac{dB}{dt} + \omega^2 B(t) = g_{ref} + K(S(t) - S_0) + CC(t) - (g(t) + a_v(t) - a_T(t) + a_{E\ddot{o}t}(t)) \quad (6.1)$$

La Figure 6.1 montre l'histogrammes de la tension du ressort et de l'accélération d'Eötvös. Ces signaux sont sensibles à la direction du vol. La raison de ce comportement est la réaction du ressort aux accélérations basses fréquences, dont l'accélération d'Eötvös qui dépend de l'azimut de l'avion. On peut vérifier les spectres des différents termes de l'Equation (6.1) en Section 4.1.

L'autre observable du gravimètre est l'effet de couplage $CC(t)$. La Figure 6.2-a montre son histogramme. On constate que cet effet ne dépasse pas $\pm 10 \text{ mGal}$.

Les termes $\omega^2 B(t)$, qui contient la position du fléau, et $d^2 B/dt^2$ sont des termes peu importants par rapport à la tension du ressort (Figures 6.2-b et 6.3-b). Pour le terme $2\lambda\omega \frac{dB}{dt}$ on attendait des magnitudes plus importantes à cause du facteur λ . Mais, son histogramme (Figure 6.3-a) montre que ce terme reste aussi faible que les deux termes précédents. La raison peut provenir des valeurs estimées $\lambda = 0,38$ et $\omega = 0,302$ par Verdun et al. (2002), page 811, que nous avons utilisées.

L'accélération verticale de l'avion peut atteindre plusieurs milliers de milligals (Figure 6.4-a). Mais le terme $a_v^*(t) = a_v(t) - a_T(t)$ qui est l'accélération verticale ressentie par le capteur gravimétrique, ne dépasse pas généralement 10 mGal (Figure 6.4-b). Dans certaines parties de séries temporelles, on observe d'importantes valeurs pour $a_v^*(t)$, qui ont été considérées comme des erreurs grossières, et ont donc été éliminées des observations.

6.1.2 Elimination des lignes de vol incohérentes

Le gravimètre est un appareil très sensible aux variations des accélérations. Après chaque sortie de ligne, à cause des fortes vibrations de l'avion, le gravimètre perd son état de stabilité mécanique. Par conséquence, le ressort, qui n'est plus en son état d'équilibre, ne retrouve son équilibre que tardivement après l'entrée de l'avion sur la ligne suivante. Ainsi, le bon fonctionnement du système gravimétrique LaCoste & Romberg suppose-t-il que le gravimètre ne soit utilisé qu'en vol stabilisé. Les premières observations de chaque ligne sont en général bruitées et doivent être supprimées.

De plus, nous avons constaté que certaines lignes de vol ne sont pas cohérentes avec des lignes voisines en terme de gravité observée, car logiquement la gravité ne change pas considérablement sur deux profils quasi-parallèles séparés d'une dizaine de kilomètres de distance. La Figure 6.5 montre la gravité le long des profils L01a à L07a calculée séparément pour chaque ligne. Manifestement, les lignes L04a et L05a ne sont pas cohérentes avec les autres lignes. De plus, nous observons des grands écarts aux points de croisement sur ces lignes (Figure 6.6). Ces écarts ne diminuent pas raisonnablement avec l'ajustement des profils (Figure 6.7). La Figure 6.8 montre les histogrammes des écarts aux points de croisement avant et après l'ajustement.

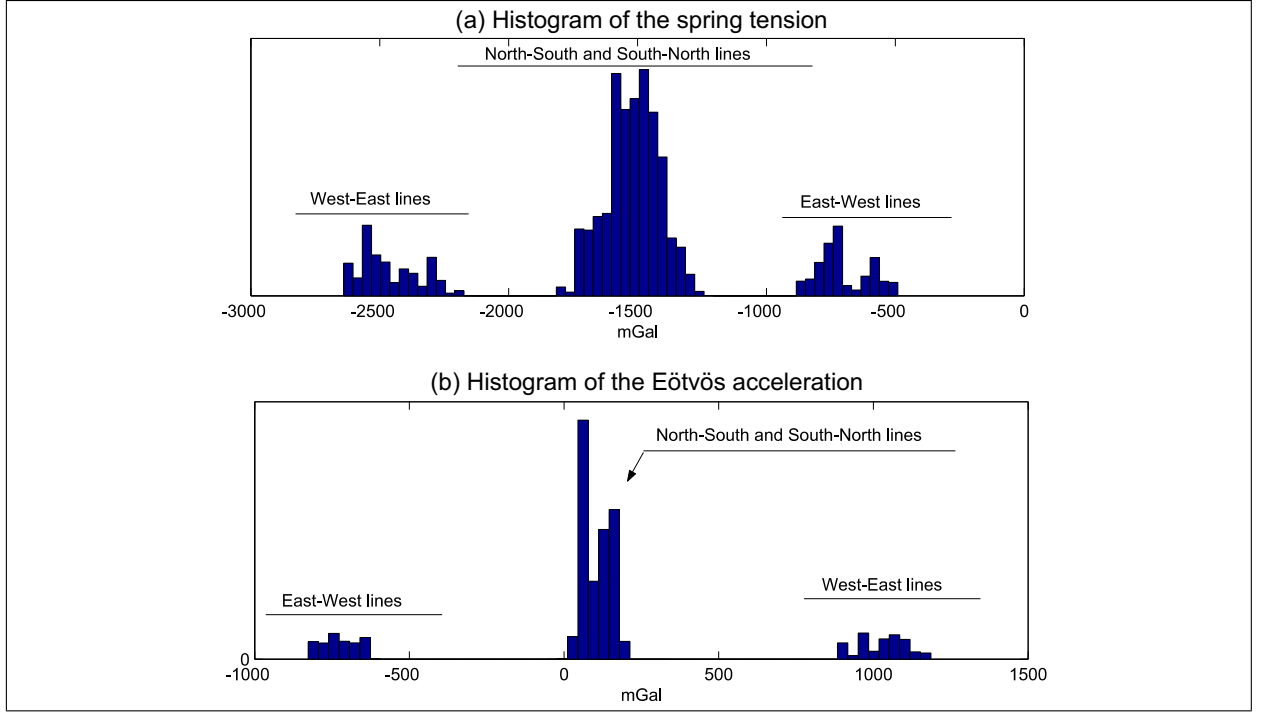


FIG. 6.1 – Histogrammes de la tension du ressort (le terme $KS(t)$ en (6.1)) et de l'accélération d'Eötvös. Ces signaux sont sensibles à la direction du vol.

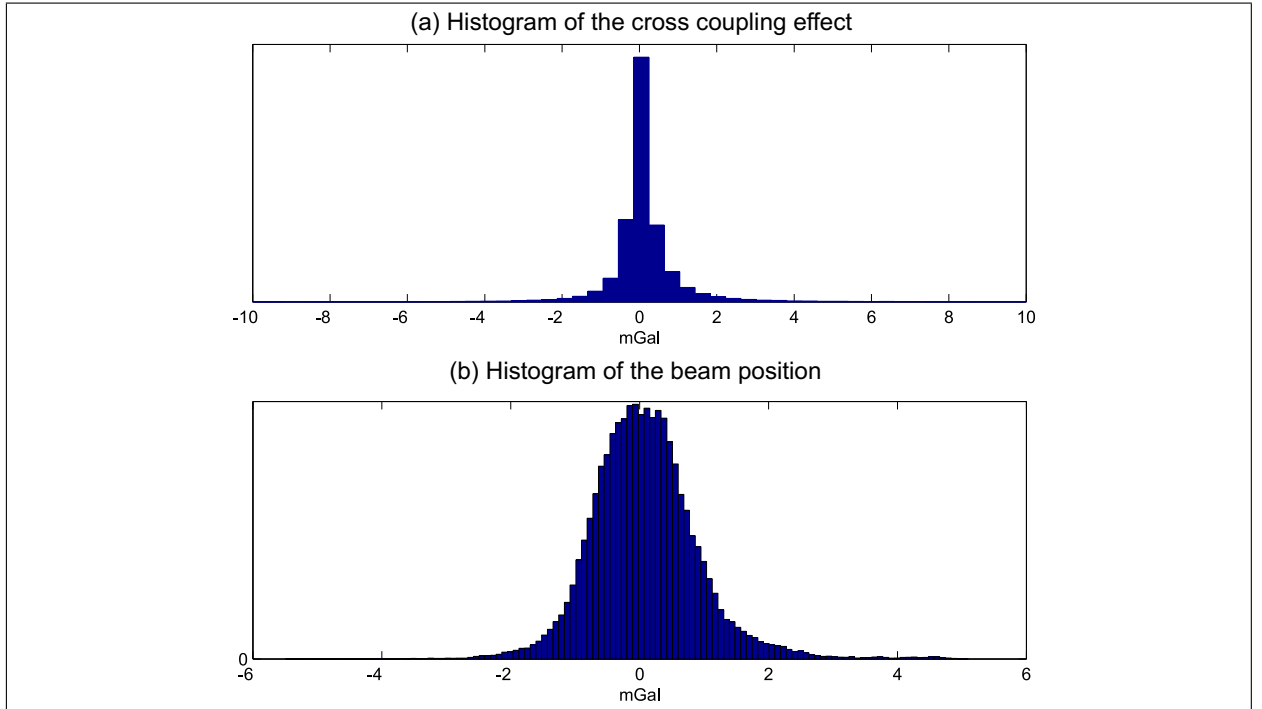
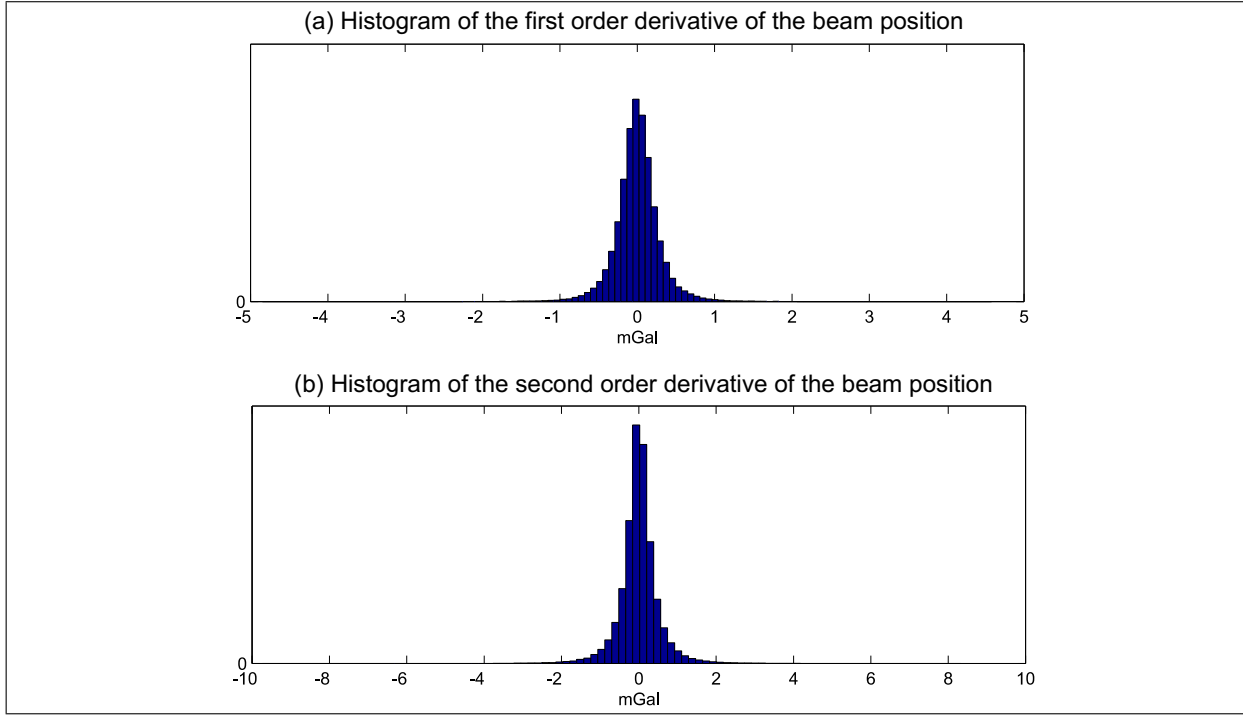
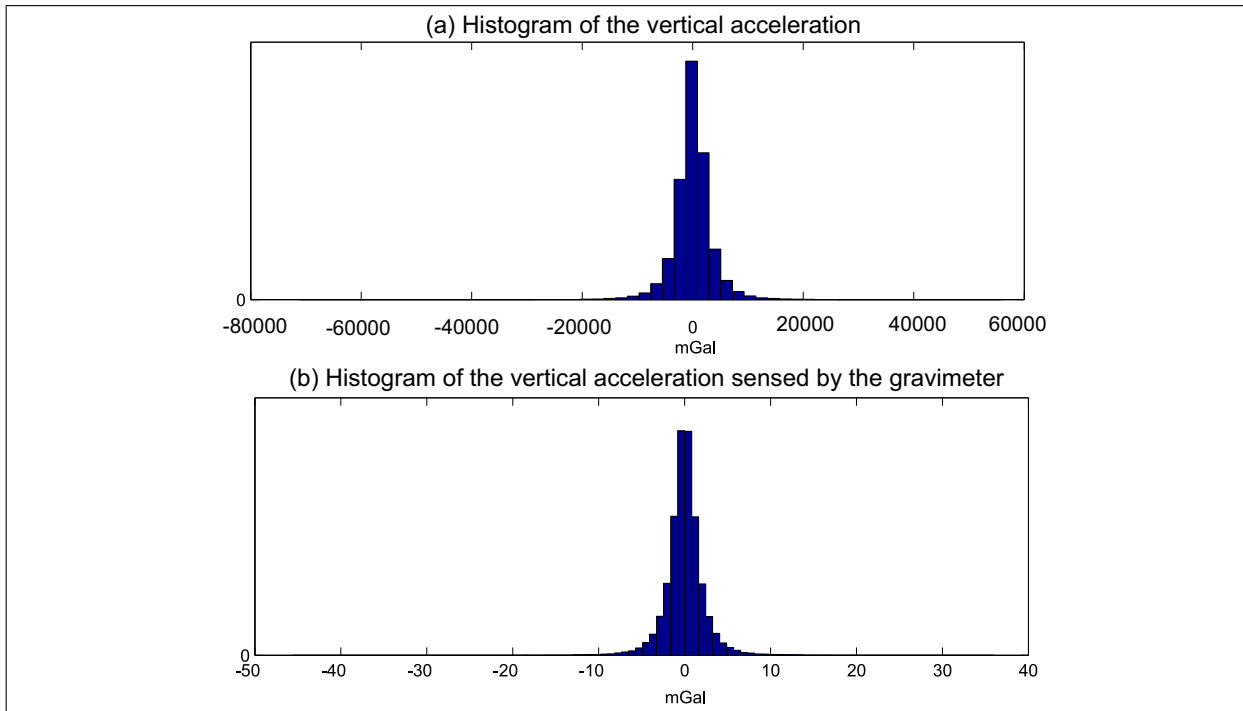


FIG. 6.2 – Histogrammes de l'effet de couplage $CC(t)$, et de la position du fléau ($\omega^2 B(t)$).

FIG. 6.3 – Histogrammes des termes $2\lambda\omega dB/dt$ et d^2B/dt^2 .FIG. 6.4 – Histogrammes de l'accélération verticale de l'avion $a_v(t)$ et de l'accélération verticale ressentie par le capteur gravimétrique $a_v^*(t) = a_v(t) - a_T(t)$.

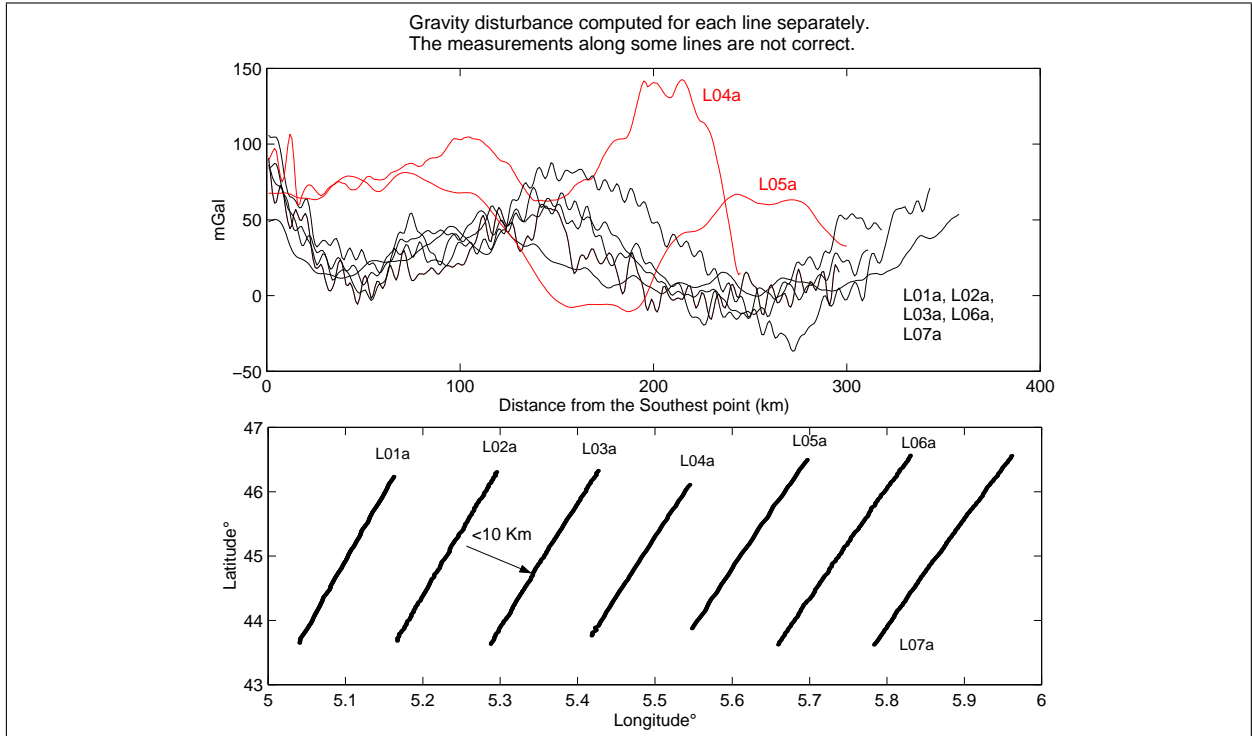


FIG. 6.5 – Perturbation de gravité calculée le long des profils quasi parallèles numérotés de L01 à L07.

Nous avons répété les calculs avec différentes méthodes. Comme les filtres appliqués sont des filtres passe-bas, la tendance des profils ne change pas avec le choix de la méthode de filtrage. La Figure 6.9 montre la perturbation de gravité calculée le long du profil L05a avec trois méthodes de filtrage.

Finalement, nous avons supprimé les lignes qui n'étaient pas cohérentes avec les lignes voisines. Au total huit lignes L04a, L05a, L11a, L14a, L18a, T01a, T07a et T09a ont été considérées comme lignes incohérentes et ont dû être supprimées.

Nous avons aussi observé une forte perturbation des séries temporelles au milieu de la ligne L17b, et nous avons constaté que ces perturbations prennent leur origine lors d'une instabilité de vol en cet endroit (Figure 6.10). Comme cette instabilité avait eu lieu plus au moins au milieu de la ligne, nous avons séparé la ligne en deux parties L17c et L17d.

Ainsi, le nombre total des lignes a diminué de 36 tabulées à 26 obtenues (Figure 6.11).

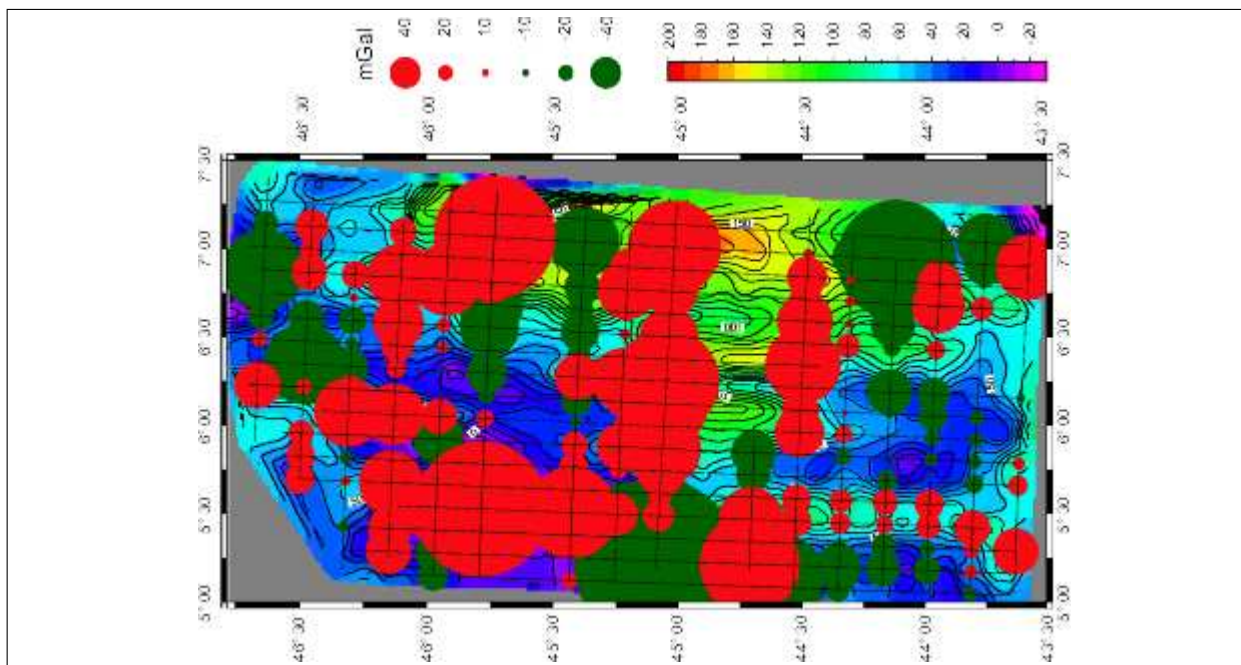


FIG. 6.6 – Nous observons des grands écarts aux points de croisement à cause des profils qui sont incohérents avec les autres profils. Le résultat montré sur cette figure correspond à la méthode de l'équation intégrale.

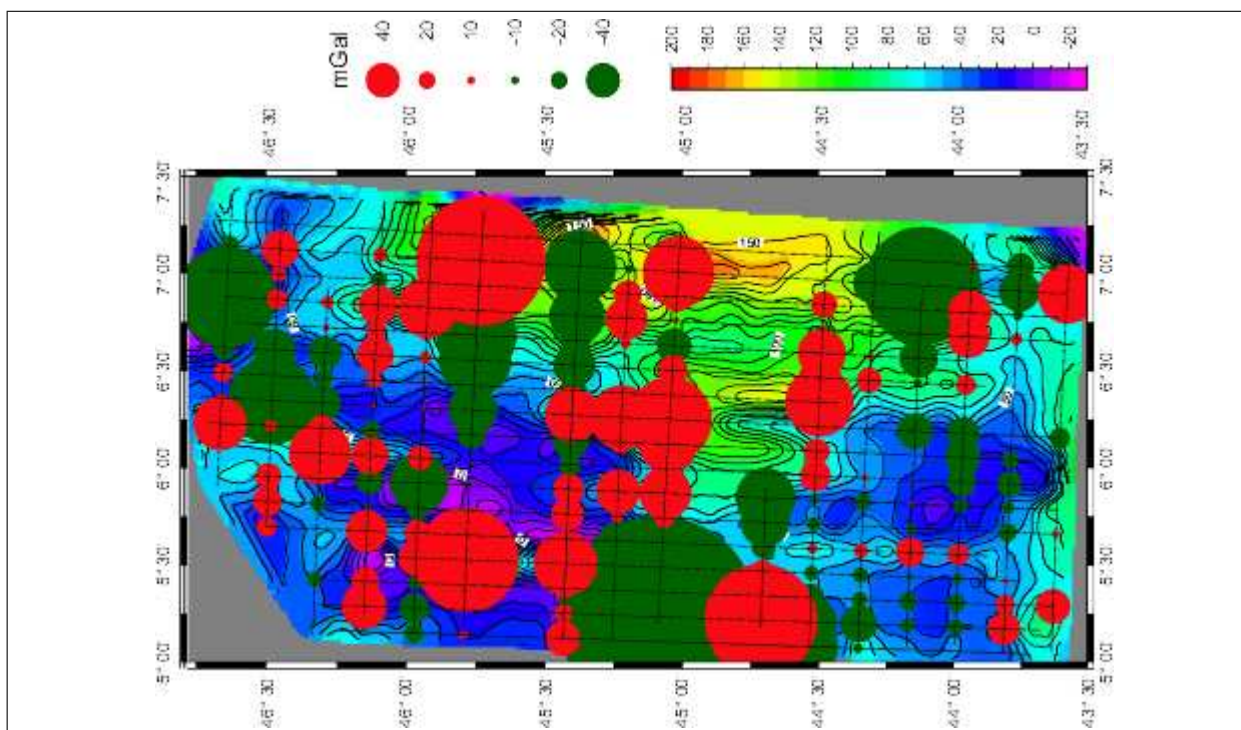


FIG. 6.7 – Même après l'ajustement aux points de croisement, les écarts observés sur la Figure 6.6 ne diminuent pas significativement.

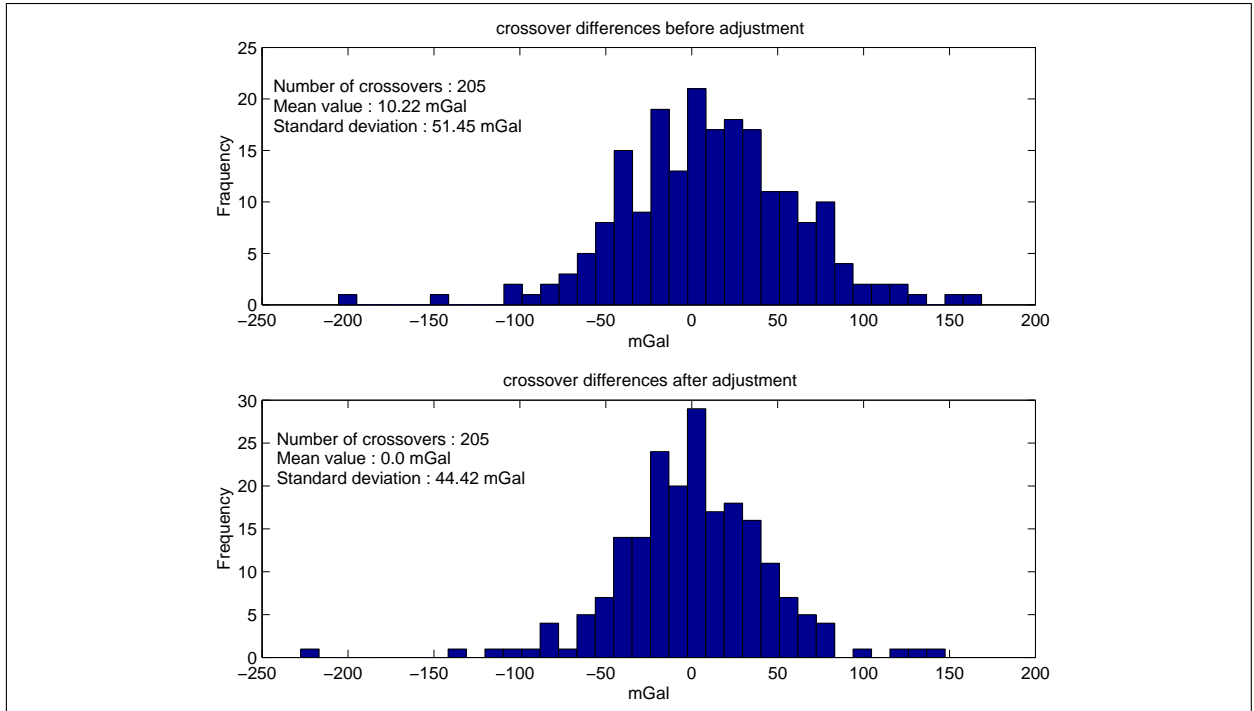


FIG. 6.8 – Histogrammes des écarts aux points de croisement avant et après l’ajustement des profils, en présence des profils incohérents.

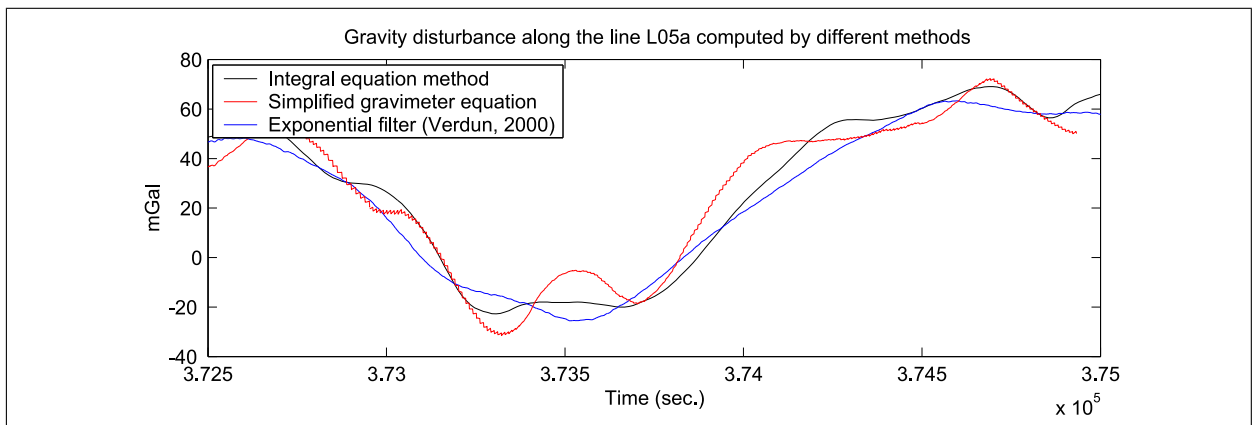


FIG. 6.9 – Différentes méthodes de filtrage ont été appliquées pour le calcul de la perturbation de gravité le long des lignes. La forme générale des profils ne change pas avec le choix du filtre. Cette figure montre le résultat des calculs pour la ligne L05a.

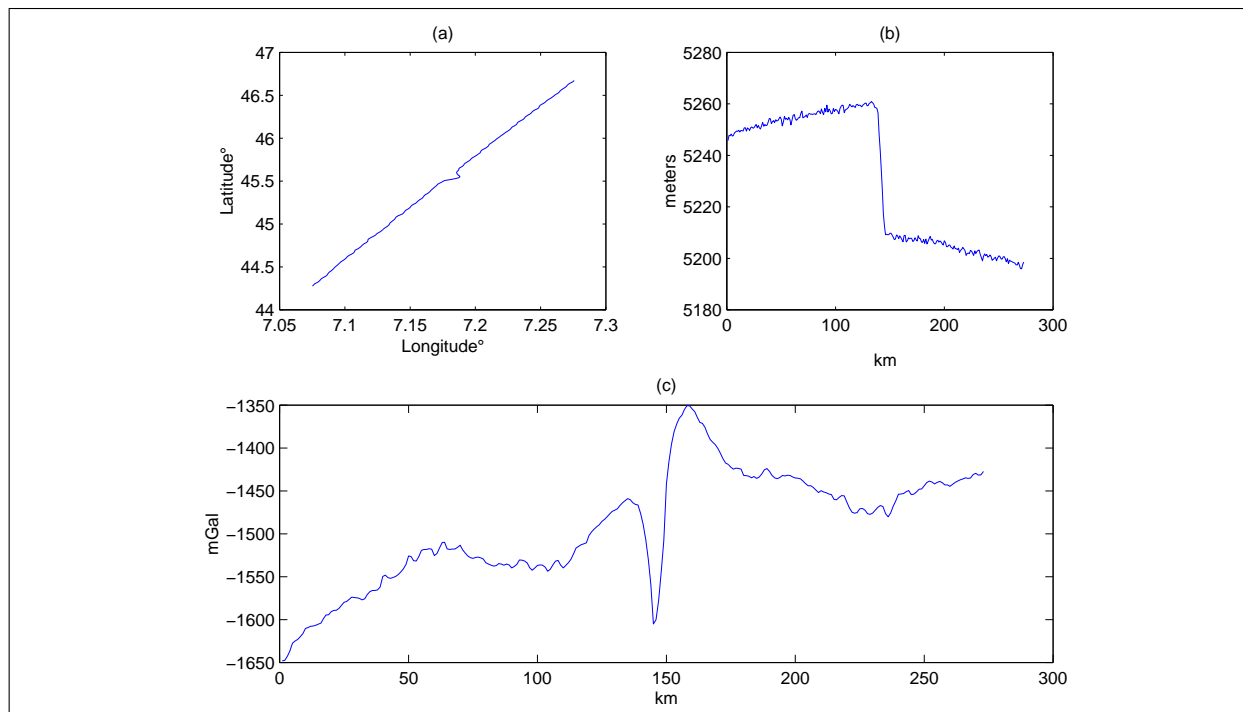


FIG. 6.10 – Une instabilité de vol est à l’origine de la perturbation observée sur les séries temporelles mesurées le long du profil L17b. (a) Trajectoire de l’avion sur le plan horizontal, (b) altitude de vol, (c) tension du ressort transformée en mGal.

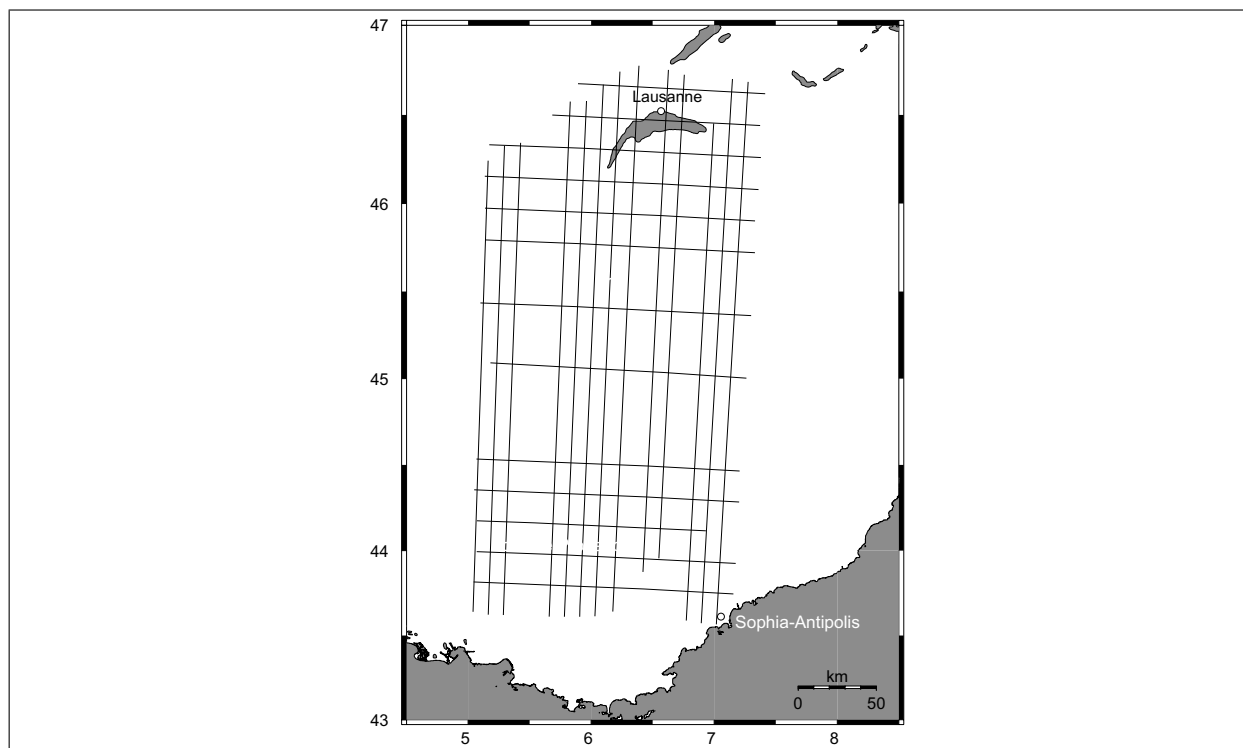


FIG. 6.11 – Lignes de vol retenues après élimination des lignes incohérentes.

6.2 Perturbations de gravité calculées par utilisation de l'équation simplifiée du gravimètre

L'Equation (3.32) présentée en Section 3.3 est l'équation simplifiée du fonctionnement du gravimètre :

$$g(t) = g_{ref} + K(S(t) - S_0) + CC(t) - 2\lambda\omega \frac{dB}{dt} - C_v(t) \quad (6.2)$$

Le signal en sortie du gravimètre est $\tilde{g}(t) = g(t) + C_v(t)$ qui a été calculé par (6.2). Pour calculer $g(t)$ il faut donc corriger $\tilde{g}(t)$ pour les accélérations parasites $C_v(t)$ composées de l'accélération d'Eötvös $a_{Eöt}$ et de l'accélération verticale a_v . La méthode classique d'application de ces corrections est de retrancher les valeurs filtrées des accélérations parasites à $\tilde{g}(t)$. On calcule ensuite la perturbation de gravité $\delta g = g - \gamma$ où γ est la gravité normale à l'altitude de vol.

Le signal de la sortie du gravimètre est déjà filtré (Figure 6.12-a). Les caractéristiques du filtre appliqué ne nous sont pas connues. Pour le calcul de la gravité à partir de (6.2), la méthode par laquelle des accélérations parasites seront calculées n'est pas importante, car elles vont être fortement filtrées (Figure 6.12-b). Par conséquent les distortions hautes fréquences dues à l'opérateur de différentiation seront également éliminées.

La Figure 6.14 montre la perturbation de gravité obtenue par cette méthode. Un filtre "moyenne glissante" avec une taille de la fenêtre égale à 200 *sec.* a été appliqué. A 80 *m/s* la vitesse moyenne de l'avion, la résolution de la sortie du filtre est 8 *km*. L'analyse des différences de la perturbation de gravité aux points de croisement (Figure 6.13-a), montre une valeur moyenne de -0,57 *mGal* et un écart type de 23,99 *mGal* pour 121 points. Evidemment, ces valeurs changent selon le choix du filtre et sa fréquence de coupure.

Nous avons appliqué la méthode d'ajustement expliquée en Section 4.5. Ainsi, la valeur moyenne des différences est 0,55 *mGal* et leur écart type est 18,77 *mGal*.

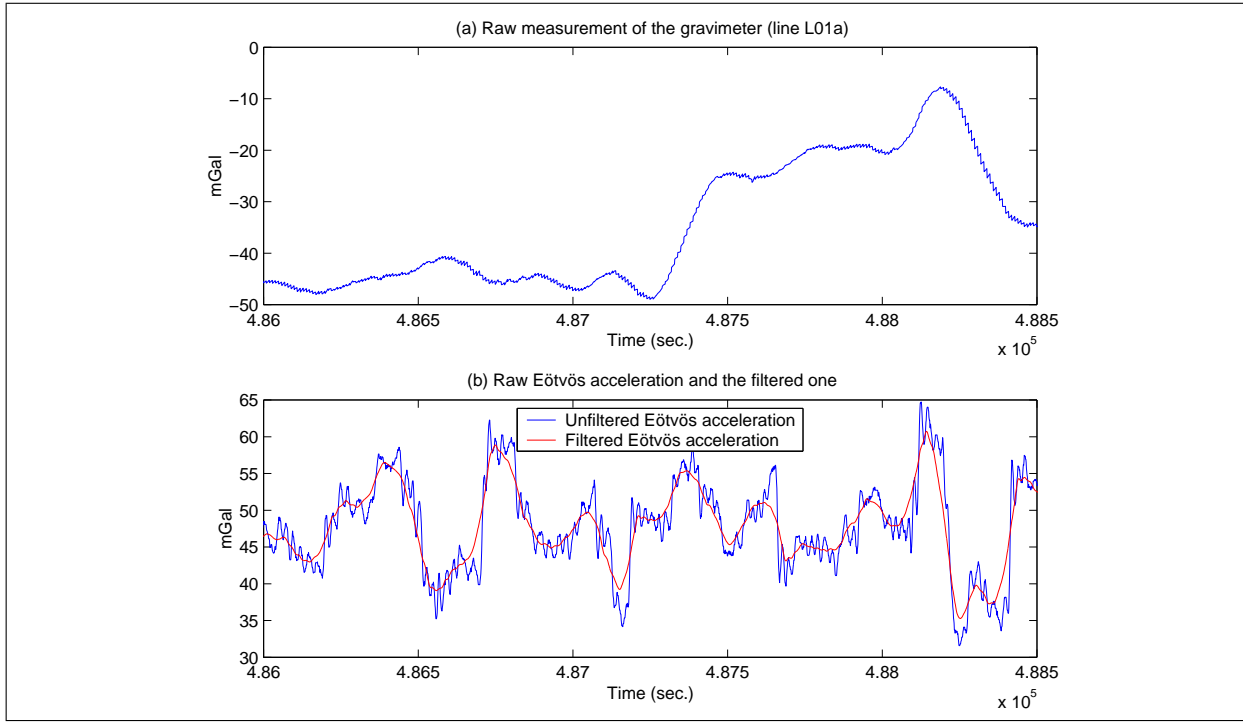


FIG. 6.12 – (a) Signal obtenu en sortie du gravimètre, calculé par l'équation simplifiée du gravimètre (6.2), (b) accélération d'Eötvös avant et après filtrage. Le filtre appliqué est un filtre moyenne glissante de 200 *sec*.

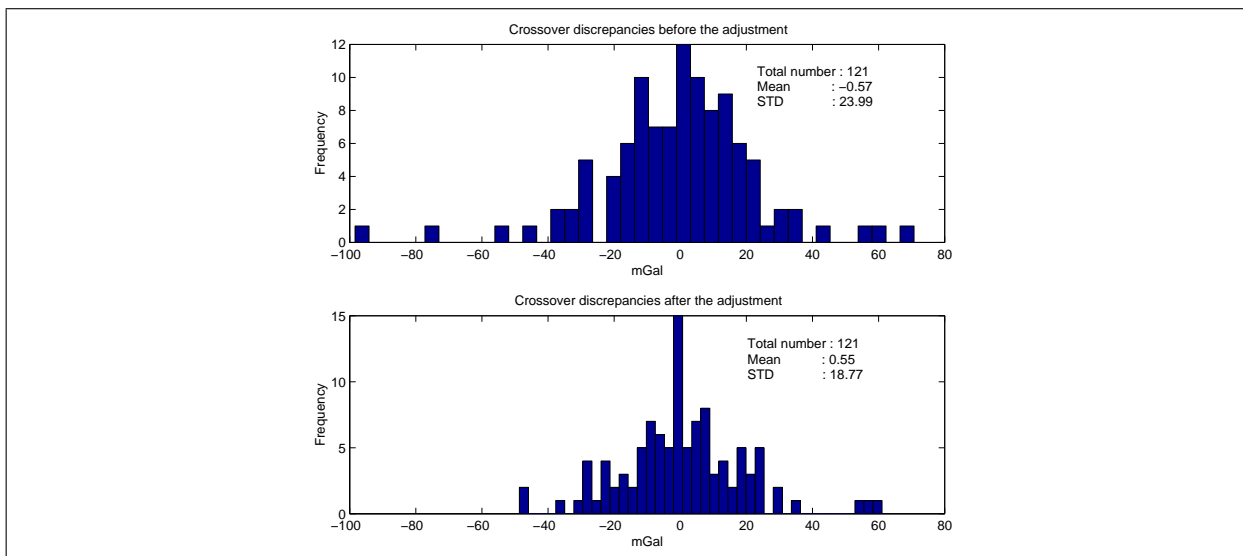


FIG. 6.13 – Histogrammes des différences de perturbation de gravité aux points de croisement correspondants à la Figure 6.14 avant et après l'ajustement.

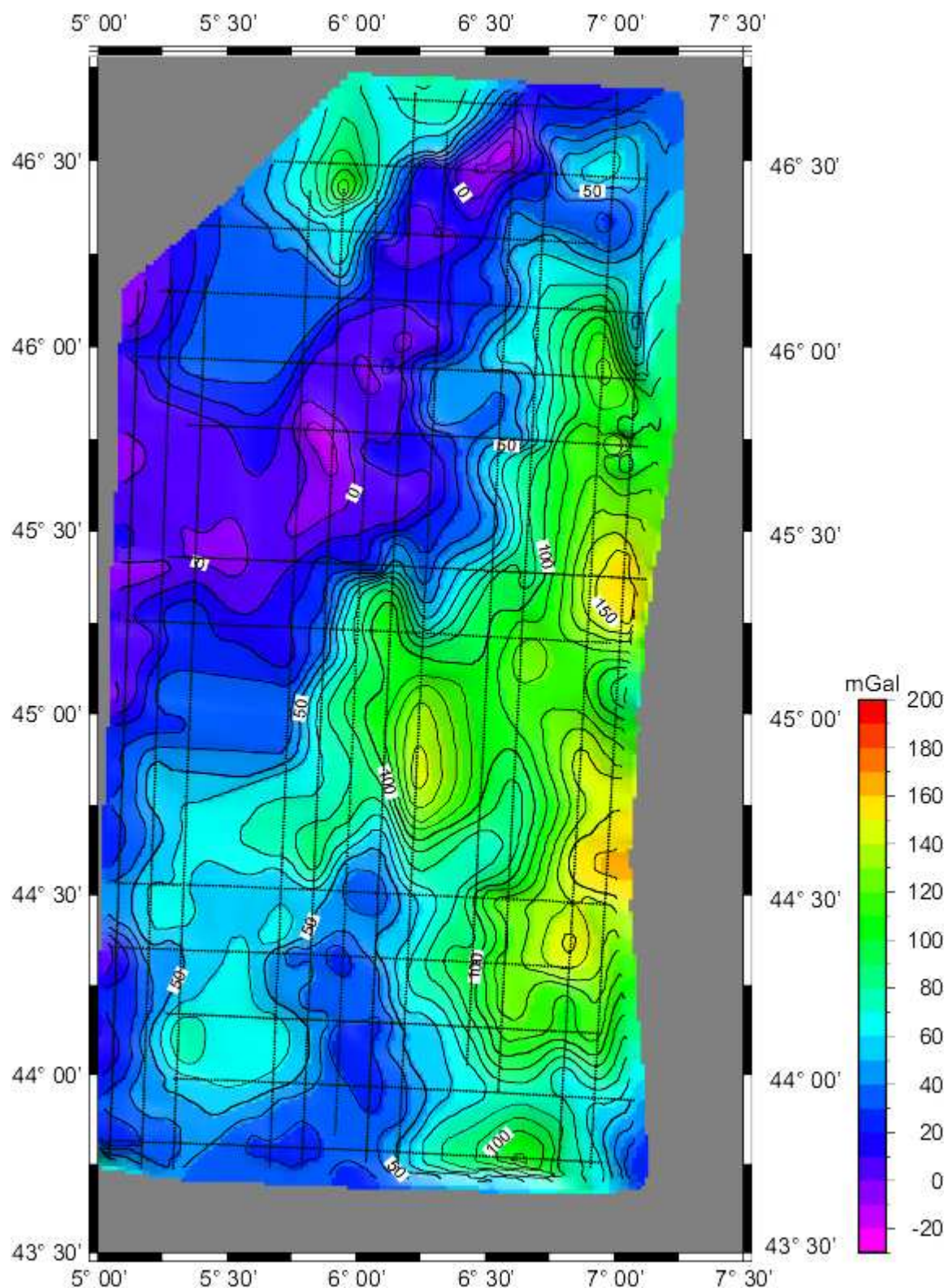


FIG. 6.14 – Carte de la perturbation de gravité à l'altitude de vol calculée à partir de la formule simplifiée du gravimètre. Un filtre moyenne glissante de 200 sec. a été appliqué.

6.3 Perturbation de gravité calculée avec l'équation différentielle complète du gravimètre

On rappelle que l'Equation (6.2) résulte de l'équation complète du gravimètre (6.1). On applique deux filtres aux différents termes de cette dernière équation pour calculer le terme inconnu $g(t)$:

1. un filtre moyenne glissante de 200 *sec.*, identique à celui qu'on a utilisé à la section précédente,
2. un filtre exponentiel détaillé en Section 4.2. La résolution du filtre appliqué est de 8 *km.*

Après avoir filtré les séries temporelles correspondantes à chaque lignes de vol, nous avons fait un ajustement aux points de croisement en utilisant la méthode expliquée en Section 4.5. L'écart type des différences aux points de croisement pour le filtre moyenne glissante est de 21,86 *mGal* et pour le filtre exponentiel est de 16,38 *mGal*. Les Figures 6.15 et 6.16 représentent les histogrammes des écarts aux points de croisement avant et après ajustement, correspondants à chacune des méthodes de filtrage. Verdun (2000) pp. 258-264, applique une autre méthode d'ajustement et obtient des écarts types qui varient de 11,13 *mGal* pour la résolution de 3,1 *km* du filtre exponentiel à 8,4 *mGal* pour la résolution de 8,4 *km*. Nous allons voir en Section suivante que la méthode de l'équation intégrale du gravimètre donne les écart aux nœuds qui ont des écart types de l'ordre de 3 *mGal*.

La carte de la perturbation de gravité calculée par le filtre moyenne glissante est présentée sur la Figure 6.17. Le résultat d'application du filtre exponentiel est représenté d'après Verdun (2000) avec permission sur la Figure 6.18. En comparant les cartes 6.17 et 6.18 avec la carte 6.14, le résultat du calcul avec l'équation simplifiée du gravimètre, on peut dire que ce biais est moins présent sur cette dernière. Il signifie que les simplifications de l'équation gravimétrique, plus le filtrage préalable des séries mesurées par le gravimètre diminuent ce biais systématique. Une autre raison de ce phénomène peut provenir des coefficients de l'équation différentielle du gravimètre que nous avons utilisé. Ces coefficients ne sont pas donnés par le constructeur et nous sommes donc obligés de les estimer. Verdun et al. (2002) a estimé ces coefficients à partir d'un modèle mathématique en utilisant les données réelles mesurées durant le levé Alpin. Le terme $2\lambda\omega dB/dt$ est étonnamment petit (Figure 6.3), tandis que, selon le constructeur, ce terme est important, à cause du coefficient λ qui a été choisi délibérément grand pour amortir le capteur gravimétrique.

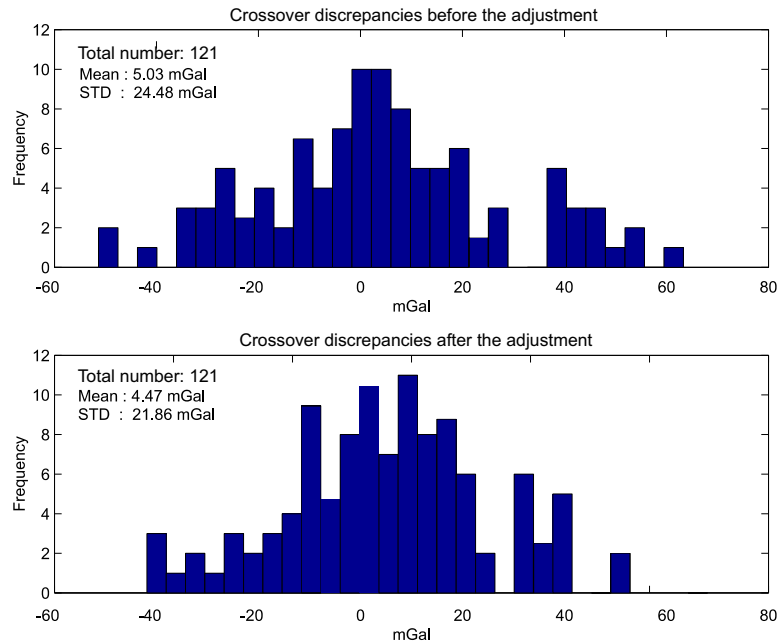


FIG. 6.15 – Histogrammes des différences de la perturbation de gravité δg aux points de croisement, avec le filtre moyenne glissante (200 sec.) avant et après ajustement. Le δg a été calculé à partir de l'équation complète du gravimètre.

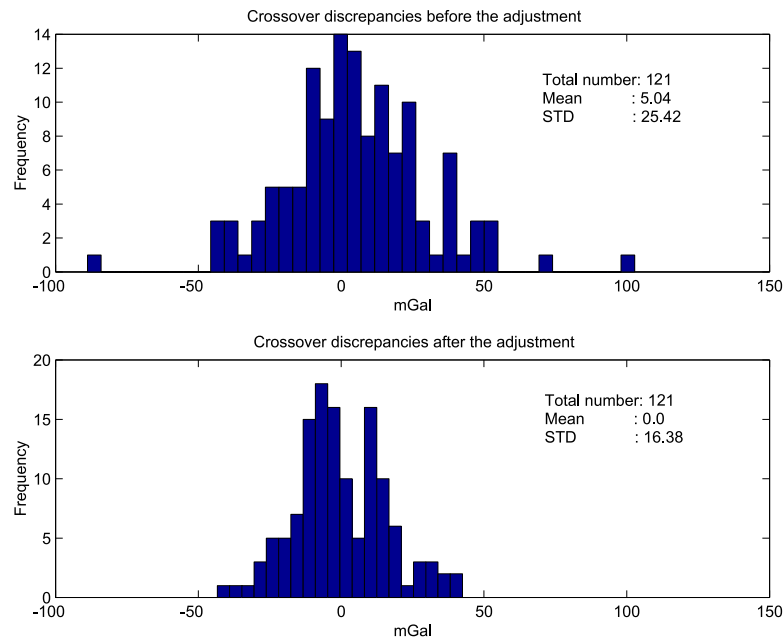


FIG. 6.16 – Histogrammes des différences de la perturbation de gravité δg aux points de croisement, avec le filtre exponentiel avant et après ajustement. Le δg a été calculé à partir de l'équation complète du gravimètre. Les résultats non-ajustés sont d'après Verdun (2000).

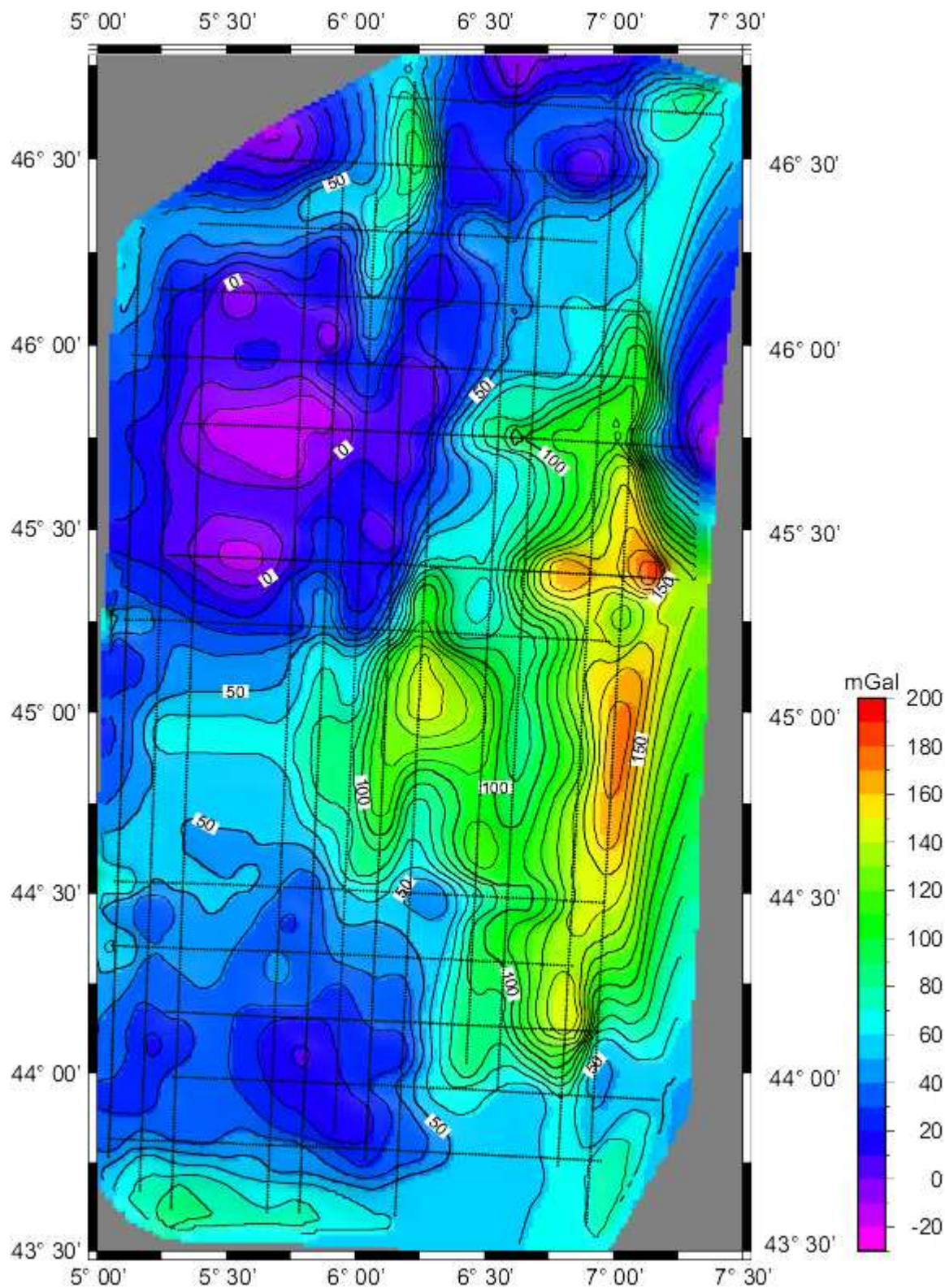


FIG. 6.17 – Carte de la perturbation de gravité à l'altitude de vol calculée à partir de l'Equation complète du gravimètre (6.1). Un filtre moyenne glissante de 200 sec. a été appliqué.

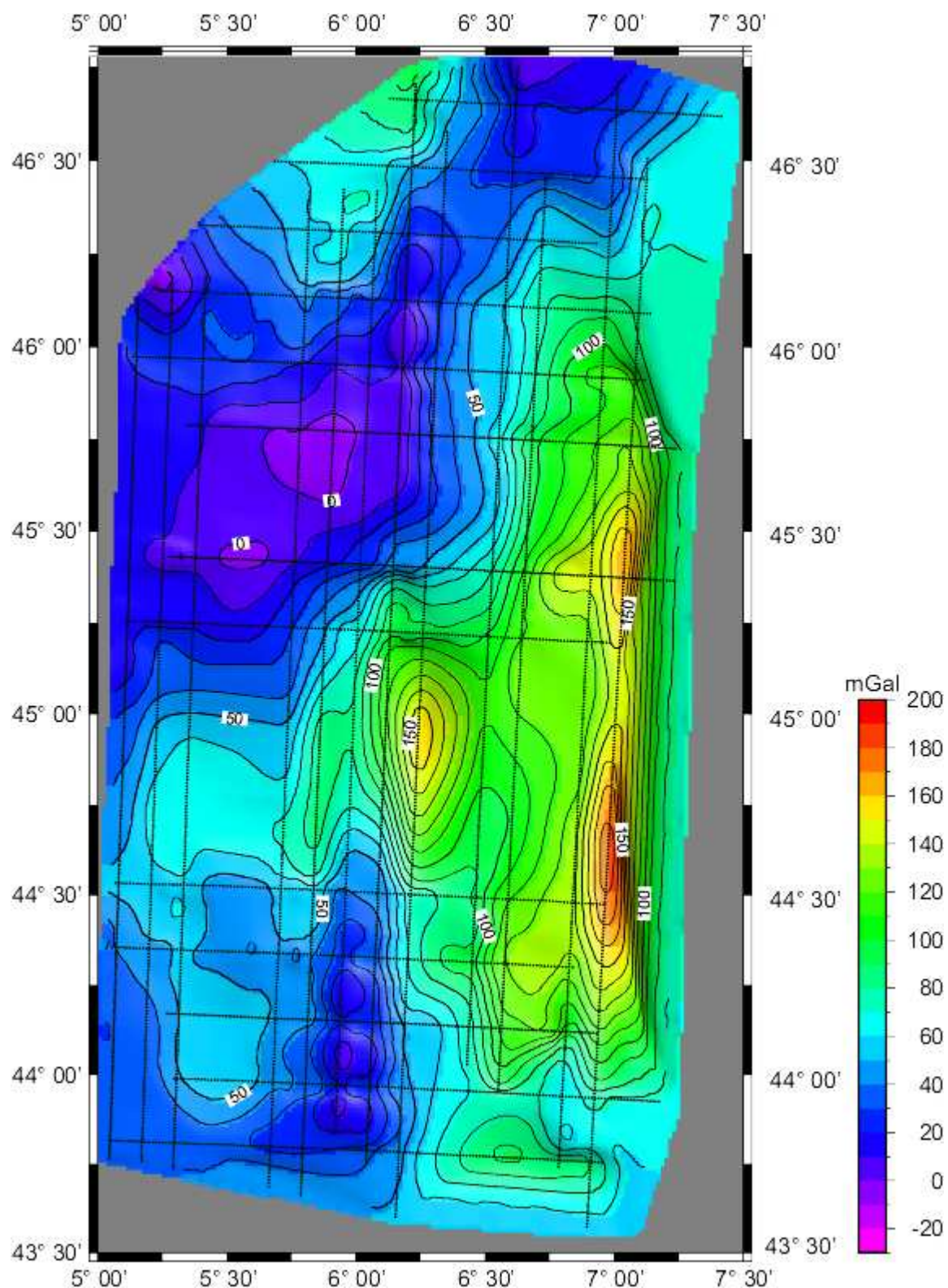


FIG. 6.18 – Carte de la perturbation de gravité à l'altitude de vol calculée à partir de l'Equation complète du gravimètre (6.1). Un filtre exponentiel a été appliqué (D'après Verdun (2000) avec permission).

6.4 Perturbation de gravité selon l'équation intégrale du gravimètre

Nous avons appliqué la méthode de l'équation intégrale du gravimètre développée en Section 4.3. Deux cas ont été considérés :

1. régularisation avec la méthode d'Helmert,
2. régularisation avec la méthode de la courbe "L".

La régularisation de l'équation intégrale contrôle le degré de lissage des séries temporelles. Pour visualiser l'effet de la régularisation sur la perturbation de gravité, on peut comparer la Figure 6.19 avec les Figures 6.20 et 6.21.

On rappelle que pour appliquer la méthode de l'équation intégrale du gravimètre, nous avons besoin d'une matrice de covariance régularisante qui est la matrice de covariance a priori des inconnues. Nous avons obtenu cette matrice à partir du modèle géopotentiel EGM96 (Section 4.4). La fonction de covariance correspondante a été évaluée à l'altitude moyenne de vol. Cette fonction, introduite par (4.54), est

$$C(\psi) = C_0 e^{-\alpha|\psi|} \cos(\omega\psi) \quad (6.3)$$

Les cartes de la perturbation de gravité correspondant à la méthodes d'Helmert et la méthodes de la courbe "L" sont présentées Figures 6.20 et 6.21 respectivement. Le paramètre de régularisation estimé par la méthode d'Helmert est égal à 1,24, et par la méthode de la courbe "L" est égal à 0,95. Le degré de lissage dépend de ce paramètre : plus il est important, plus la carte obtenue est lisse. La différence des deux cartes 6.20 et 6.21 qui est due à la différence des estimations du paramètre de régularisation par la méthode d'Helmert et par la méthode de la courbe "L", est montrée Figure 6.22.

La méthode d'Helmert nous permet également d'avoir la carte des écarts types associés des perturbations de gravité (Figure 6.23). Cette carte est une indication de la propagation des erreurs, ainsi que de l'effet de la régularisation sur les perturbations de gravité estimées. La dimension de la matrice a posteriori des inconnues est égale au nombre total des points de mesures inclus dans le processus d'estimation. Pour chaque point nous avons alors une variance estimée. Cette variance représente la propagation des erreurs aléatoires à travers le modèle mathématique, ainsi que l'effet de la régularisation. On remarque sur la carte 6.23 qu'au voisinage des points de croisement la variance diminue jusqu'à moins de 3 *mGal*, ce qui est du au nombre supérieur des mesures à ces endroits. Nous remarquons également l'effet de bordure qui est à cause de la méthode de la régularisation. Les écarts types augmentent jusqu'à 6 *mGal* dans certains endroits. Cette effet peut être étudié plus en détail afin de trouver des solutions pour le diminuer.

Ainsi, on peut conclure que la gravimétrie aéroportée avec le système gravimétrique LaCoste & Romberg peut atteindre jusqu'à 3 *mGal* de la précision si des précautions nécessaires ont été prises.

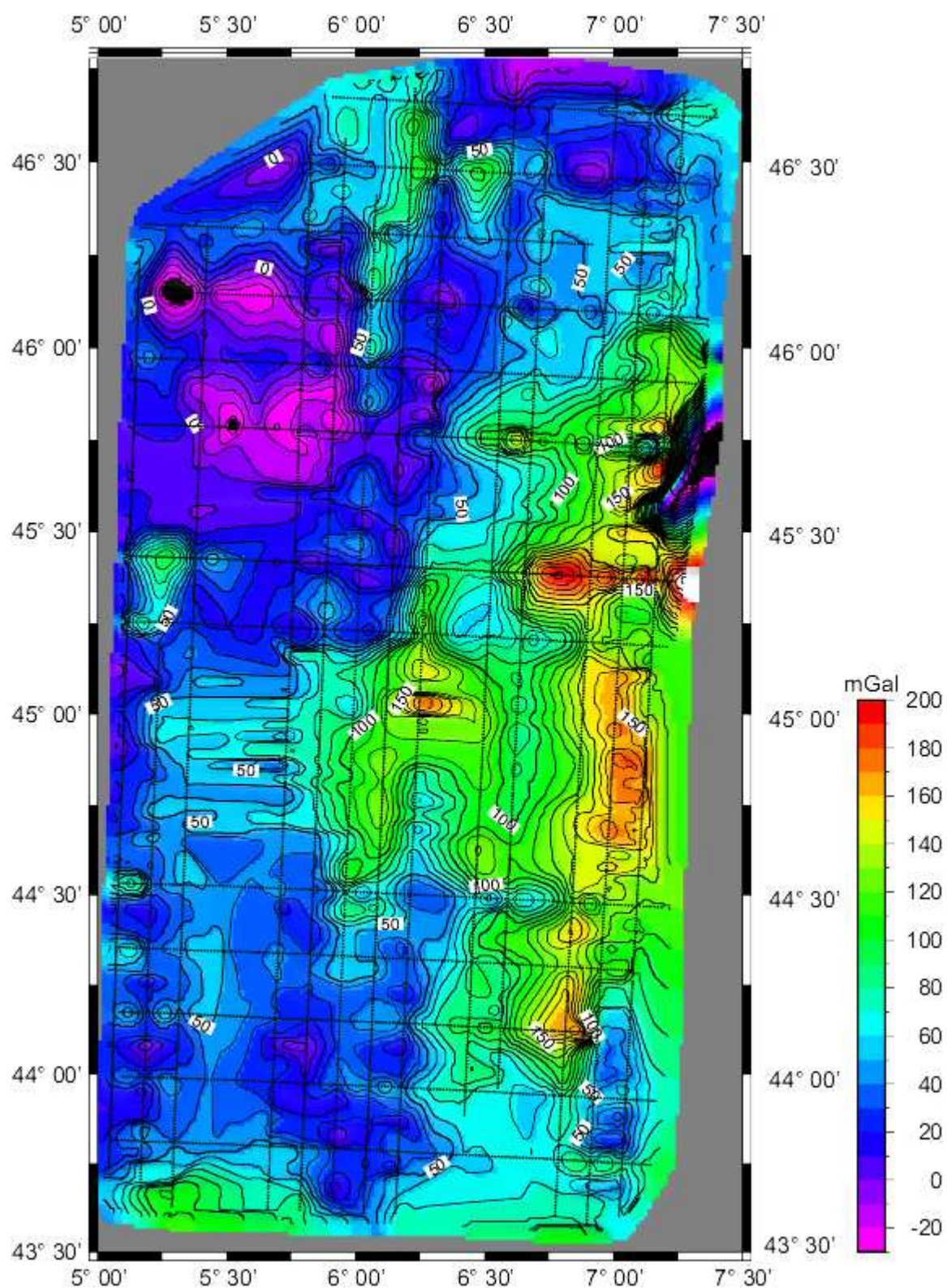


FIG. 6.19 – Perturbation de gravité calculée par l'équation intégrale du gravimètre sans la régularisation.

TAB. 6.1 – Résultats d’analyses des écarts aux points de croisement. Les écarts pour toutes les méthodes sont calculés après l’ajustement des profils par la méthode introduite par Mittal (1984) expliquée en Section 4.5.

Méthode de calcul	Valeur moyenne (mGal)	Ecart type (mGal)
Equation simplifiée (filtre moyenne glissante, 200 <i>sec</i>)	0,55	18,77
Equation complète (filtre moyenne glissante, 200 <i>sec</i>)	4,47	21,86
Equation complète (filtre exponentiel)	0,0	16,38
Equation intégrale (régularisation d’Helmert)	-0,001	2,73
Equation intégrale (régularisation de la courbe "L")	-0,27	5,04

Un ajustement aux points de croisement du type introduit par Mittal (1984), expliqué en Section 4.5, a été appliqué sur les résultats de la méthode de l’équation intégrale. Les Figures 6.25 et 6.26 montrent les écarts aux nœuds avant et après l’ajustement pour les méthodes d’Helmert et de la courbe "L" respectivement. On remarque que la méthode de l’équation intégrale, même sans l’ajustement, donne des écarts aux nœuds qui sont bien plus faible comparés aux écarts donnés par les autres méthodes (Tableau 6.1). La raison peut être expliquée par l’effet de la matrice de covariance a priori des inconnues introduite pour la régularisation qui agit comme une matrice de poids supplémentaire. Comme la fonction de covariance 6.3 est une fonction de la distance entre les points, en donnant plus de poids aux points qui sont proches, notamment les point situés au voisinage des points de croisement, elle influence la solution de telle sorte que les écarts aux nœus soient le plus petits possibles.

L’effet de la régularisation est aussi visible en comparant les histogrammes 6.25 et 6.26 avec l’histogramme des perturbations de gravité caclulées sans régularisation, montré sur la Figure 6.24. Parmi les méthodes que nous avons étudié, la méthode de l’équation intégrale par la régularisation d’Helemrt donne les écarts les plus petits. Nous avons rassemblé les résultats des analyses des écarts aux points de croisement dans le Tableau 6.1.

6.4.1 Résultats d’application des équations de contrainte aux points de croisement

Les équations de contraintes expliquées en Section 4.5 ont été ajoutées au processus de moindres carrés. Deux modèles ont été développés en Annexe F :

- modèle linéaire,
- modèle quadratique.

Ces équations agissent localement sur les points les plus proches aux points de croisement. Or, nous attendons des changements locaux sur la perturbation de gravité estimée à ces endroits. Un exemple a été présenté en Section 4.5 par la Figure 4.26.

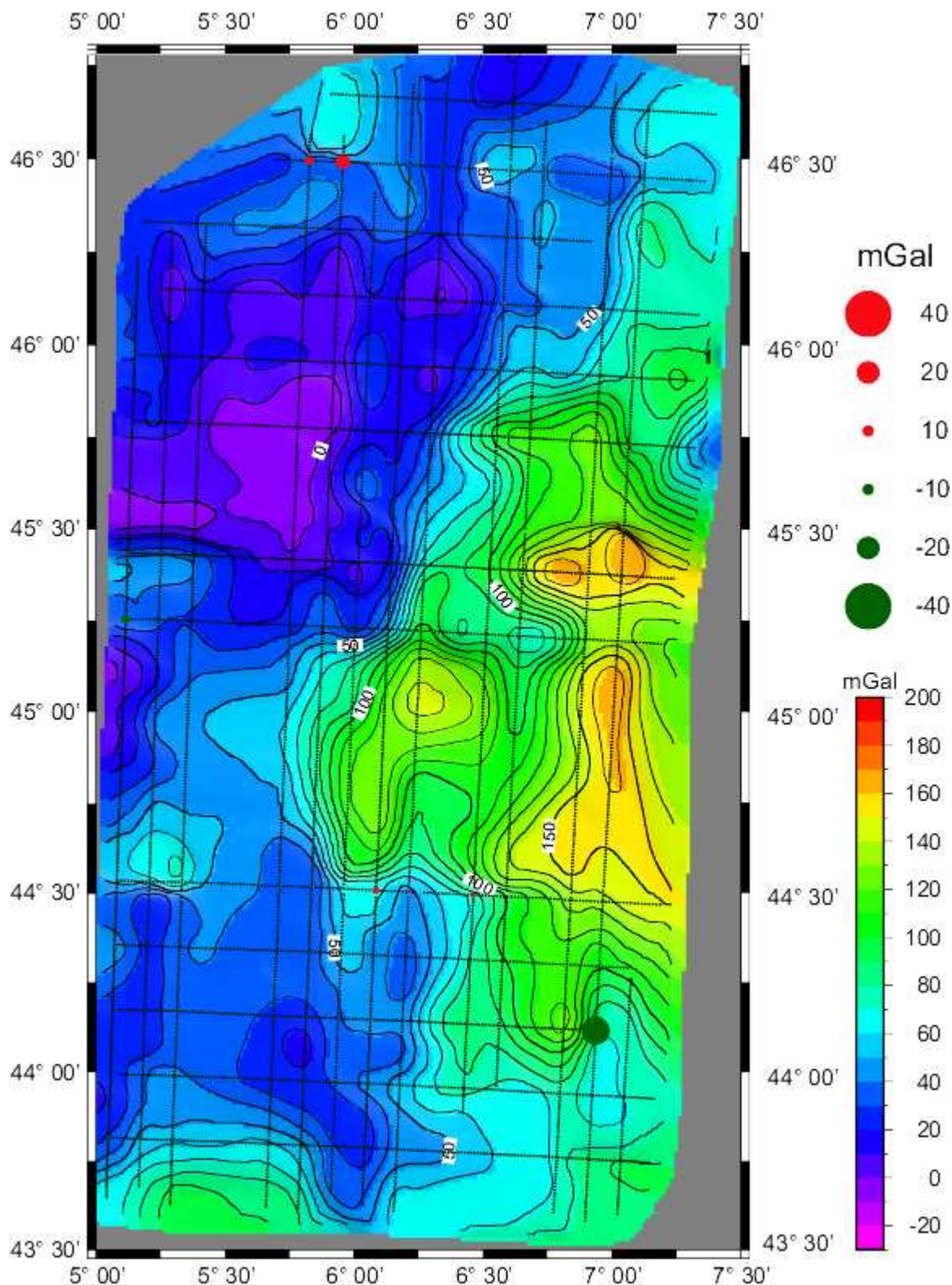


FIG. 6.20 – Perturbation de gravité calculée par l'équation intégrale du gravimètre régularisée par la méthode d'Helmert. Un ajustement selon la méthode de Mittal (1984), expliquée en Section 4.5, a été de plus appliqué, bien que les écarts obtenus aux points de croisement soient faibles. Les écarts après ajustement sont illustrés par les cercles. On peut considérer cette carte comme le meilleur modèle des perturbations de gravité que nous proposons sur cette zone dans le cadre de cette thèse.

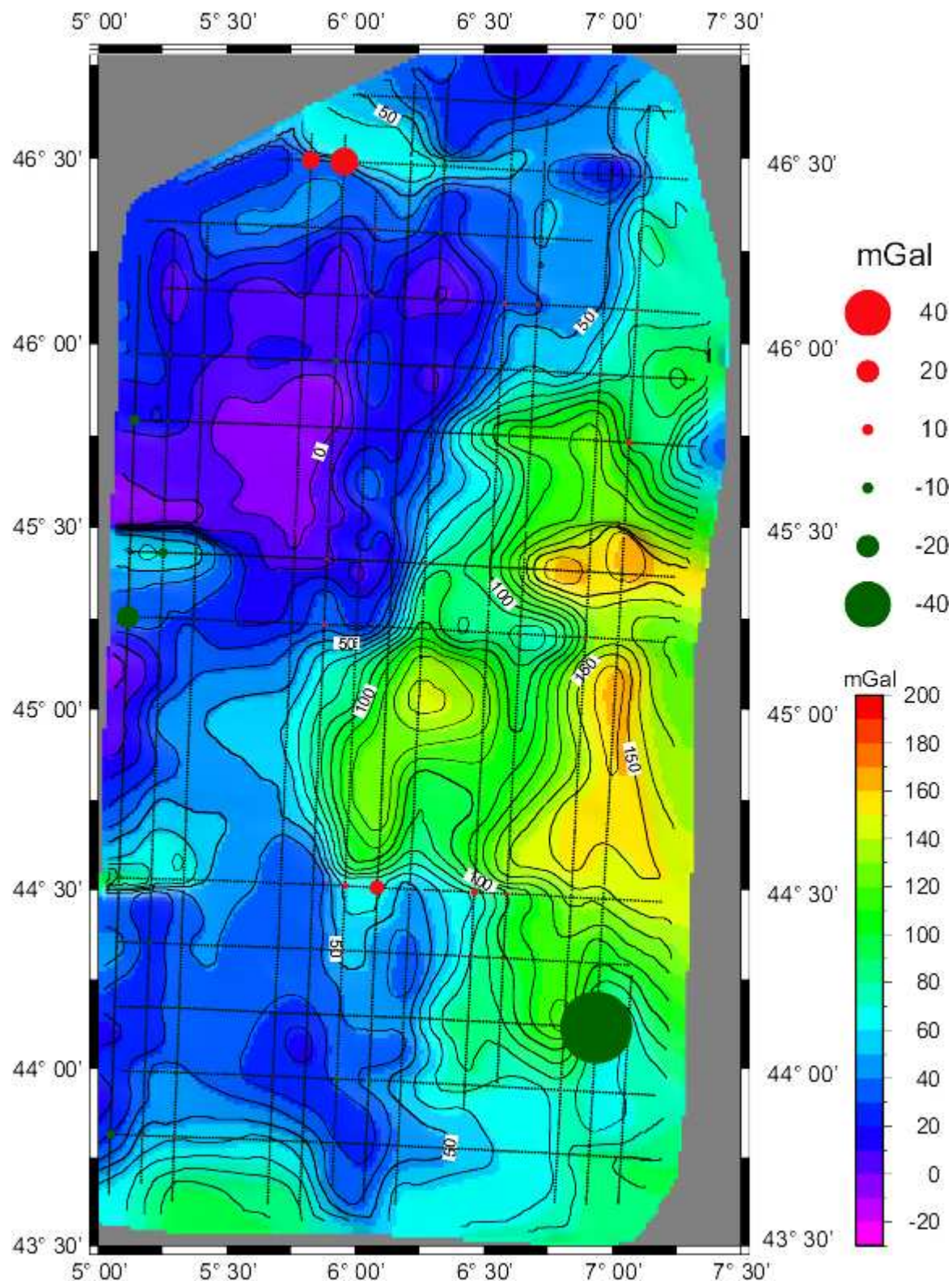


FIG. 6.21 – Perturbation de gravité calculée par l'équation intégrale du gravimètre régularisée par la méthode de la courbe "L". Un ajustement selon la méthode de Mittal (1984), expliquée en Section 4.5, a été de plus appliqué bien que les écarts obtenus aux points de croisement soient faibles. Les écarts après ajustement sont illustrés par les cercles.

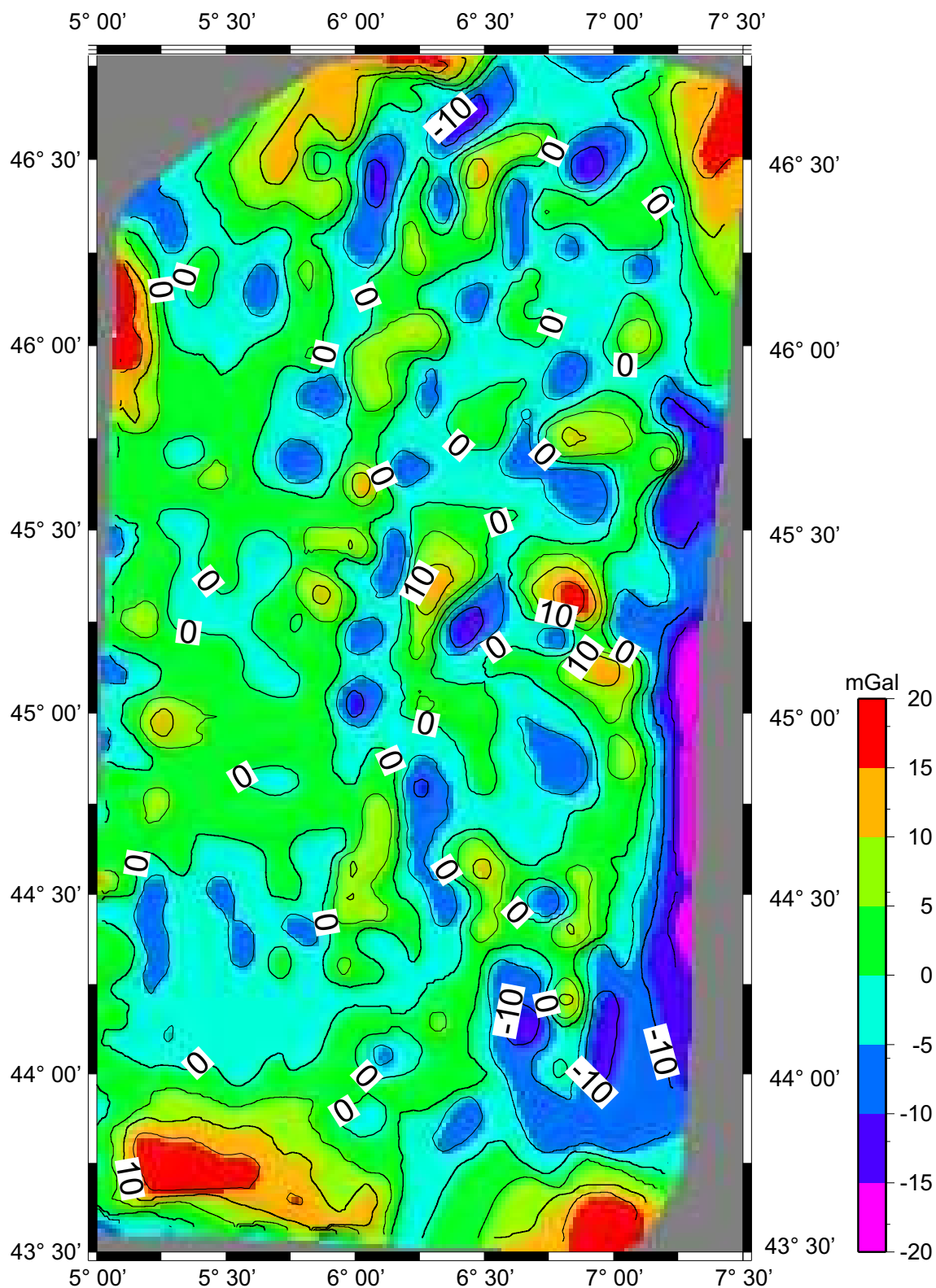


FIG. 6.22 – Différences des perturbations de gravité estimées par la méthode d'Helmert et par la méthode de la courbe "L". Le paramètre de régularisation estimé par la première méthode est égal à 1,24 et par la deuxième méthode à 0,95.

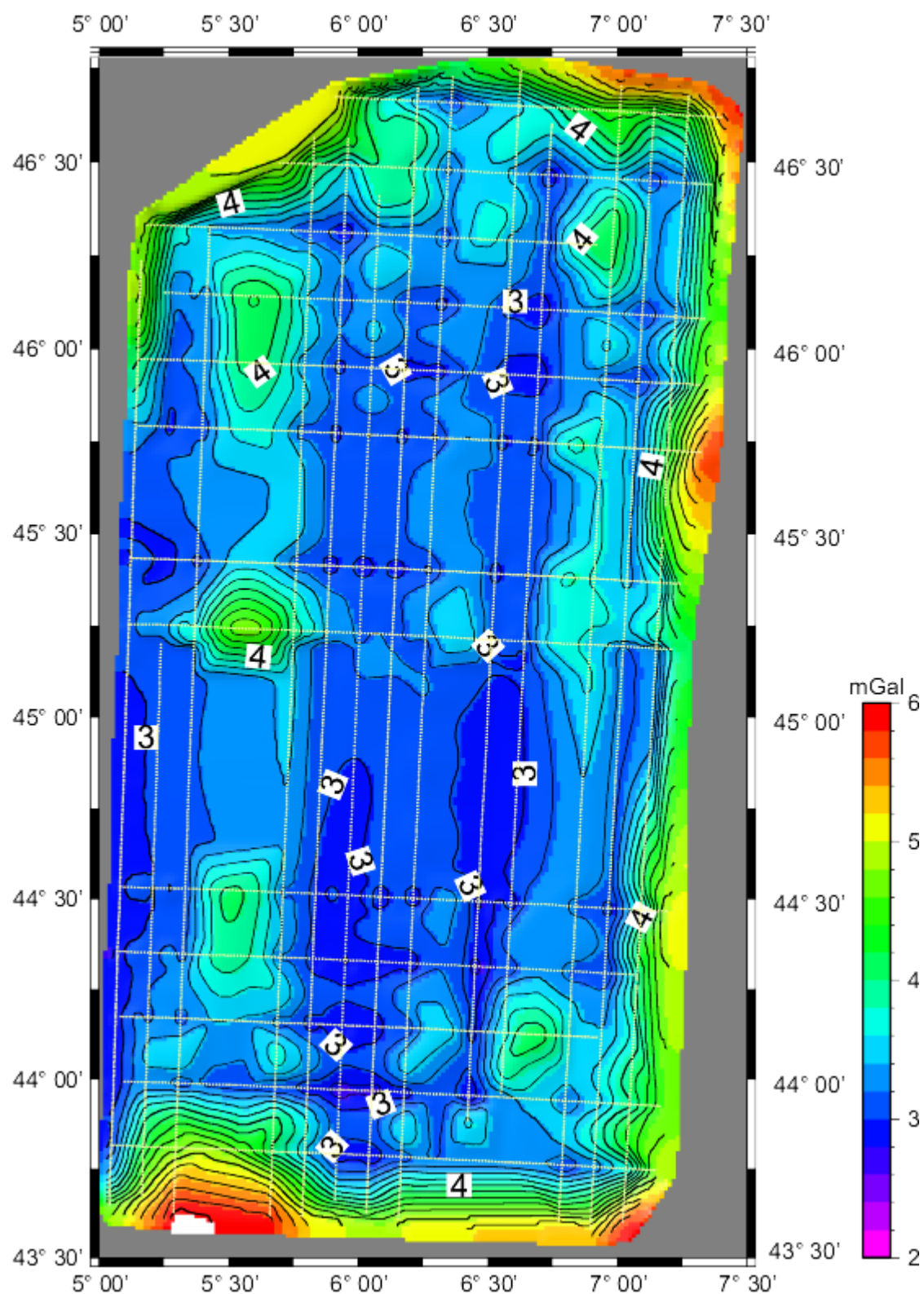


FIG. 6.23 – Carte des écarts types des perturbations de gravité.

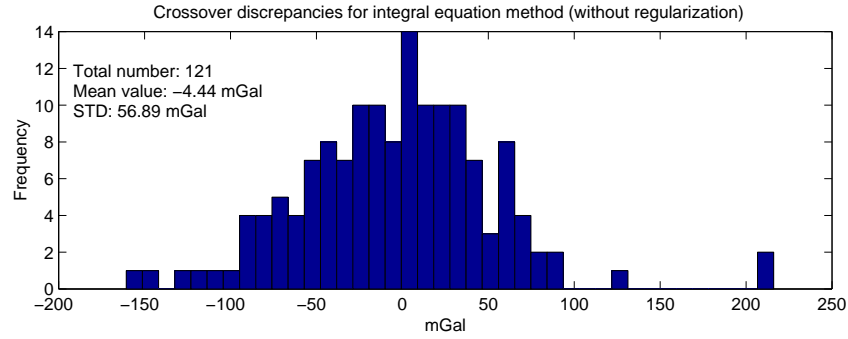


FIG. 6.24 – Histogramme des différences des perturbation de gravité aux points de croisement, calculées avec la méthode de l'équation intégrale sans régularisation.

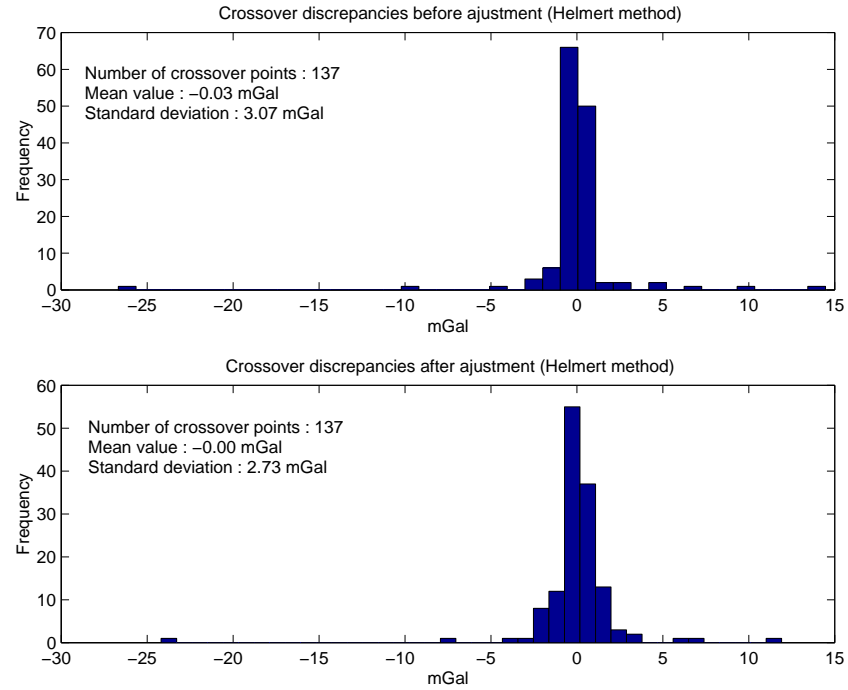


FIG. 6.25 – Histogramme des différences des perturbations de gravité aux points de croisement, calculées par la méthode d'Helmert avant et après ajustement.

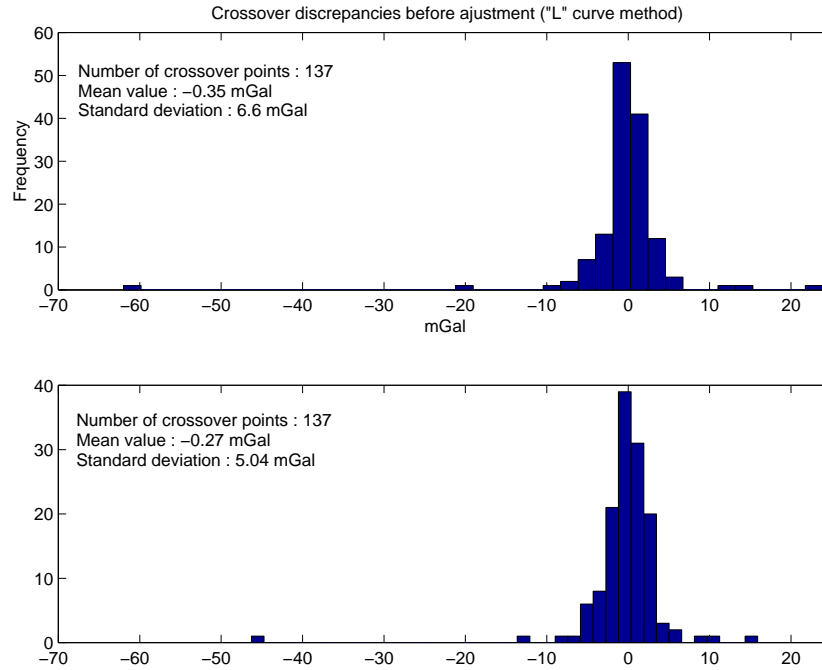


FIG. 6.26 – Histogramme des différences des perturbations de gravité aux points de croisement, calculées par la méthode de la courbe "L" avant et après ajustement.

La cartes 6.27 illustre la différence des perturbations de gravité calculées avec et sans les équations de contrainte pour le modèle linéaire. La différence pour le modèle quadratique est également présentée la Figure 6.28. La méthode de régularisation appliquée était la méthode d'Helmert. On remarque que les différences, en appliquant le modèle linéaire, sont plus importants par rapport au modèle quadratique. Les différences dans l'ensemble affectent les résultats plus ou moins d'une façon régionale, plutôt que locale, mais nous ne pouvons pas dire si ces changements améliorent les résultats.

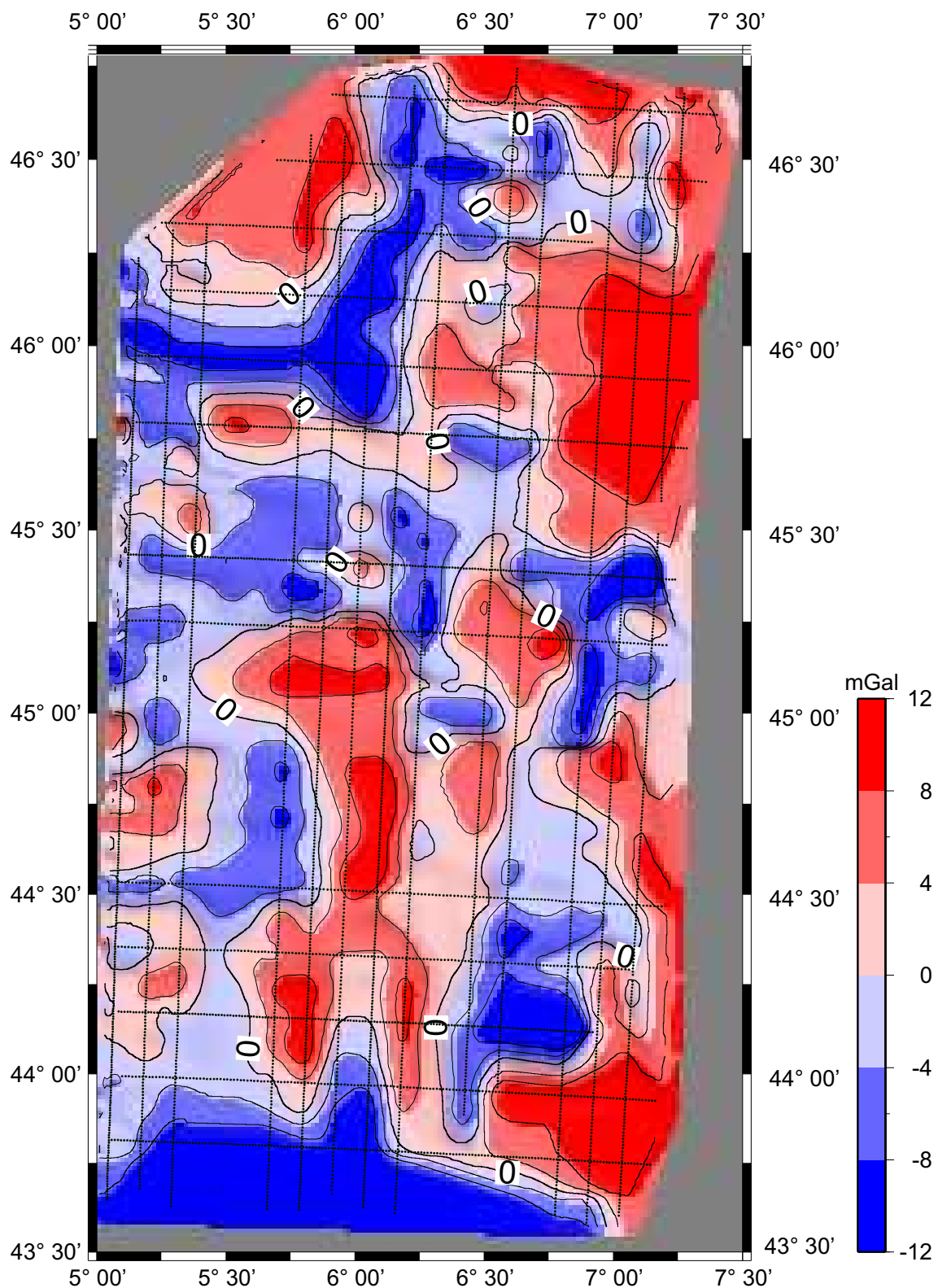


FIG. 6.27 – Différence des perturbations de gravité calculées avec et sans les équations de contrainte pour le modèle linéaire. La méthode de régularisation est la méthode d'Helmert.

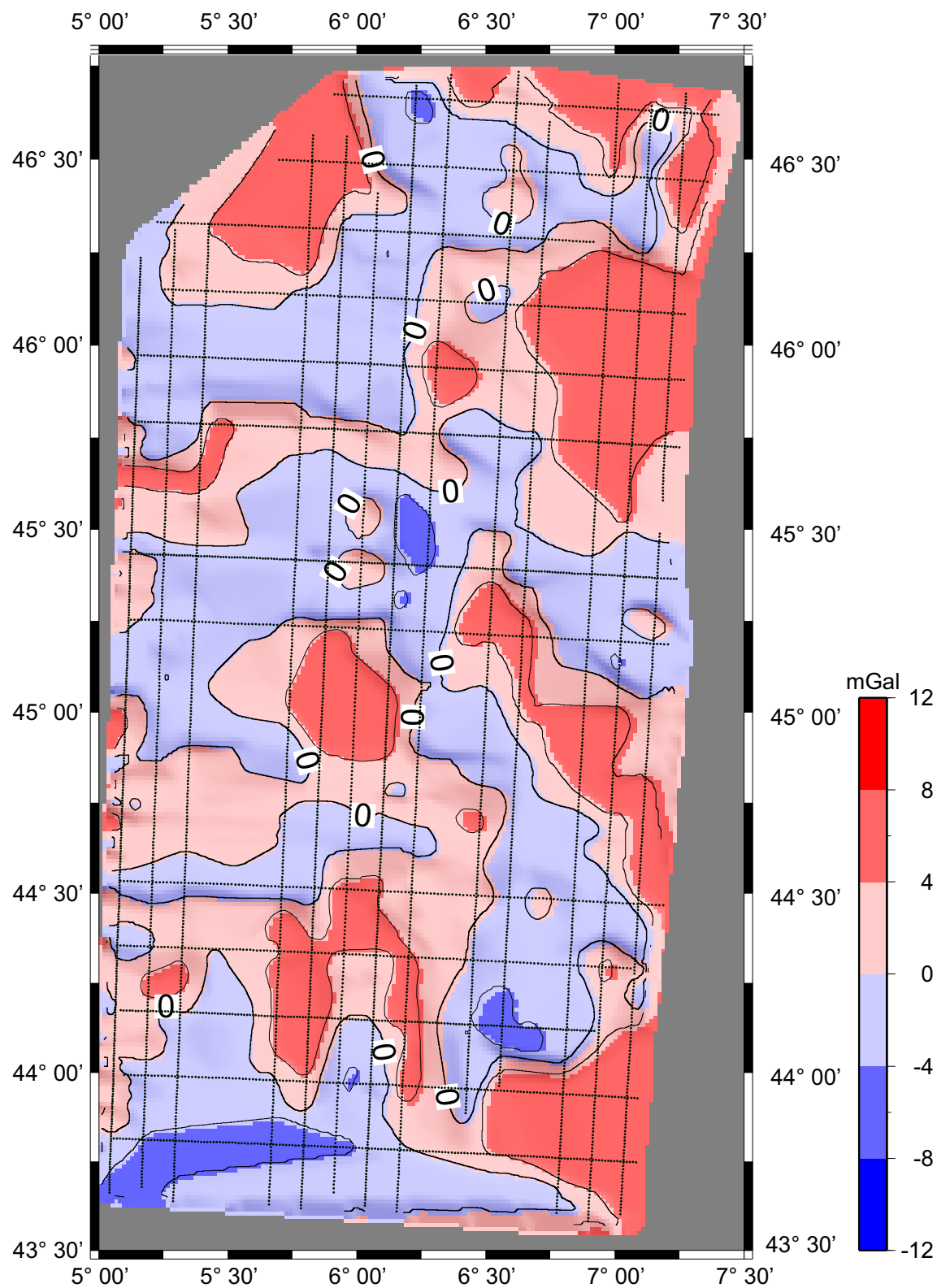


FIG. 6.28 – Différence des perturbations de gravité calculées avec et sans les équations de contrainte pour le modèle quadratique. La méthode de régularisation est la méthode d'Helmert.

TAB. 6.2 – Coefficients de corrélation croisée entre les cartes de perturbations de gravité calculées par différentes méthodes de filtrage : (1) équation simplifiée (filtre moyenne glissante, 200 *sec*), (2) équation complète (filtre moyenne glissante, 200 *sec*), (3) équation complète (filtre exponentiel), (4) équation intégrale (régularisation d'Helmert), (5) équation intégrale (régularisation de la courbe "L").

Méthode	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
(1)	1.0000	0.7641	0.9053	0.7808	0.8002
(2)	0.7641	1.0000	0.8158	0.8783	0.8920
(3)	0.9053	0.8158	1.0000	0.8511	0.7961
(4)	0.7808	0.8783	0.8511	1.0000	0.9565
(5)	0.8002	0.8920	0.7961	0.9565	1.0000

6.5 Validation des cartes de la perturbation de gravité calculée à l'altitude de vol

Nous avons présenté en Sections 6.2 à 6.4, cinq cartes de la perturbation de gravité à l'altitude vol :

1. La carte calculée selon l'équation simplifiée du gravimètre en appliquant un filtre moyenne glissante de 200 *sec*.. La Figure 6.14 montre cette carte.
2. La carte calculée selon l'équation non simplifiée du gravimètre en appliquant un filtre moyenne glissante de 200 *sec*.. La Figure 6.17 montre cette carte.
3. La carte calculée selon l'équation complète du gravimètre en appliquant un filtre exponentiel. Cette carte a été calculée par Verdun (2000). La Figure 6.18 montre cette carte.
4. La carte calculée selon l'équation intégrale du gravimètre, en appliquant la méthode de la régularisation d'Helmert. La Figure 6.20 montre cette carte.
5. La carte calculée selon l'équation intégrale du gravimètre, en appliquant la méthode de la régularisation de la courbe "L". La Figure 6.21 montre cette carte.

Une méthode pour comparer ces cartes entre elles est de calculer le coefficient de corrélation des δg correspondants à chaque carte. Le Tableau 6.2 montre ces coefficients de corrélation. Les résultats de toutes les méthodes sont corrélés au moins à 76%.

Au niveau de la validation par le critère intrinsèque d'analyse des écarts aux nœuds, la méthode de l'inversion de l'équation intégrale régularisée par la méthode d'Helmert, donne les écarts les plus petits. Il est important de noter que ces écarts sont fonctions du degré de filtrage : plus le filtrage est fort plus les écarts sont petits. Pour cette raison nous préférons de ne pas considérer le critère de l'écart aux nœuds comme critère de la qualité des observations et du modèle mathématique appliqué. Les écarts aux nœuds sont des quantités indiquant la cohérence des observations entre elles. Nous pouvons donc les utiliser pour trouver des éventuelles erreurs grossières. Un exemple est montré Figures 6.6 et 6.7. Le critère intrinsèque de la précision du levé est la matrice de covariance a posteriori

des inconnues qui reflète la propagation des erreurs aléatoires des observations à travers le modèle mathématique (Figure 6.23).

Le critère externe de la validation des cartes est la différence du champ calculé à l'altitude et des mesures gravimétriques effectuées au sol et prolongées à la même altitude.

Nous avons utilisé le résultat du prolongement des données terrestres à l'altitude de vol obtenu par Verdun (2000), avec permission. Le processus appliqué et basé sur la technique de "Retrait/Restauration"¹ illustrée Figure 6.29. Les anomalies à l'air libre sont d'abord corrigées de l'effet des masses au dessus du géoïde, ensuite les grandes longueurs d'onde de l'anomalie de gravité sont enlevées pour déterminer les petites longueurs d'onde du champ. Ceci est fait par un processus similaire à celui que nous avons appliqué pour les perturbations de gravité en Section 4.3. L'anomalie de gravité est reliée en approximation sphérique au potentiel perturbateur T par [Hofmann-Wellenhof et Moritz (2005)]

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{R}T \quad (6.4)$$

L'anomalie de gravité Δg développé en série d'harmoniques sphériques est

$$\Delta g(r, \vartheta, \lambda) = \frac{GM}{r^2} \sum_{\ell=2}^L (\ell-1) \left(\frac{R}{r}\right)^\ell \sum_{m=0}^{\ell} \left(\Delta C_{\ell m} \cos(m\lambda) + \Delta S_{\ell m} \sin(m\lambda) \right) P_{\ell m}(\cos \vartheta) \quad (6.5)$$

Les paramètres de ces deux dernières équations sont identiques à ceux des équations (4.26) et (4.30). On rappelle que le degré de troncature L dépend de l'étendue de la région. Pour appliquer l'algorithme de "Retrait/Restauration", (6.5) doit être calculée une fois sur le géoïde et une deuxième fois à l'altitude de vol.

Sans entrer dans les détails, Verdun (2000) a utilisé un code développé par Ciminale et Loddò (1989) pour le processus de prolongement vers le haut. Ce code utilise une méthode basée sur le principe de la *couche équivalente*. Cette méthode considère une couche de matière parallèle à la topographie, dont l'effet gravitationnel coïncide avec le champ observé. Ceci permet de trouver une formule semi-analytique pour calculer le champ équivalent en n'importe quel point extérieur à la topographie. Après avoir calculé le champ à l'altitude de 5270 m, Verdun (2000) a ensuite validé le résultat du code de prolongement utilisé, en comparant les anomalies prolongées avec les anomalies créées par une source pesante enfouie à une certaine profondeur. La forme de la source est prismatique, dont ses dimensions et sa densité sont connues. La différence entre la quantité prolongée et la quantité théorique fournit une estimation quantitative des performances de l'algorithme utilisé. Une erreur relative de 3% a été obtenue en utilisant cette méthode (Figure 6.30).

Présentons les résultats de la prolongation des anomalies de gravité à l'altitude de 5270 m. La Figure 6.32 donne la couverture des anomalies de gravité mesurées au sol sur la région. Les données présentées sur cette figure correspondent à la base de données du

¹Remove/Restore

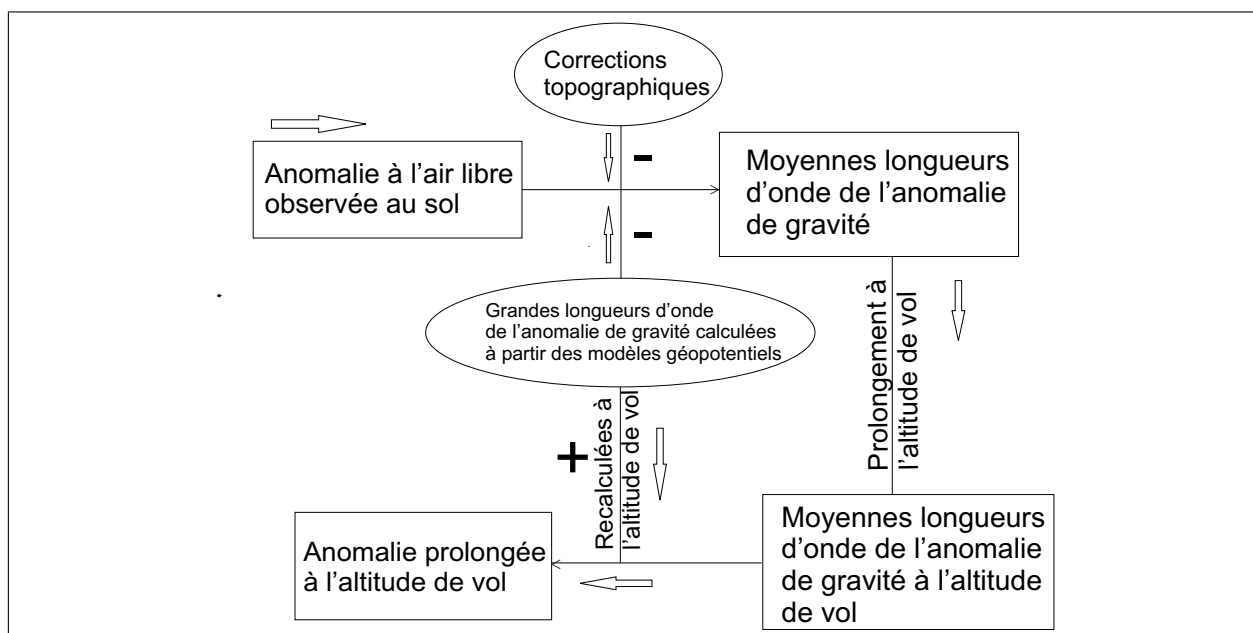


FIG. 6.29 – Algorithme de "Retrait/Restauration" pour le prolongement des anomalies de gravité mesurées au sol à l'altitude de vol.

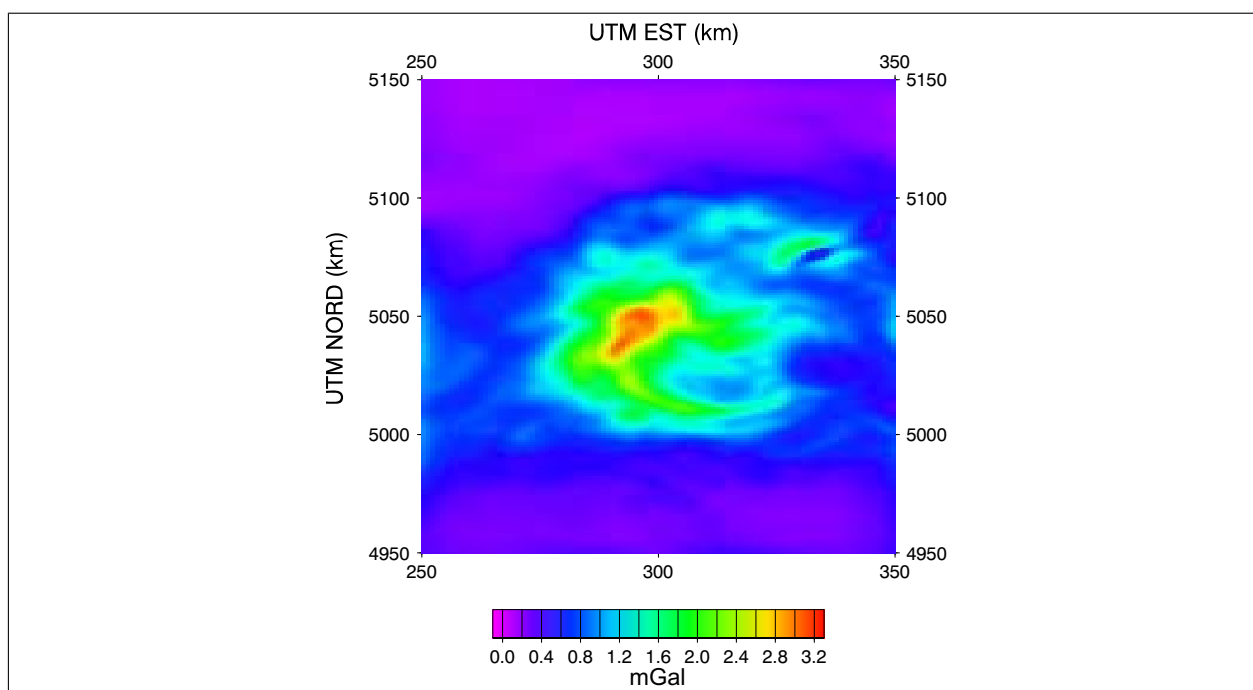


FIG. 6.30 – Différence entre l'anomalie de gravité prolongée à l'altitude de 5270 m et l'anomalie de gravité théorique créée par le prisme enfoui. Pour une anomalie de 100 mGal, l'écart maximum observé est de 3 mGal, soit une erreur relative de 3% pour la méthode de prolongement. Figure d'après Verdun (2000), avec permission.

BGI¹. On remarque que la distribution des anomalies n'est pas homogène sur la région. La carte des anomalies de Bouguer prolongées à l'altitude de 5270 m est présentée Figure 6.33.

Passons maintenant aux cartes des perturbations de gravité corrigées de l'effet de la topographie à l'altitude de vol. Cette correction a été calculée par le programme "TC", qui est une sous-routine du logiciel "Gravsoft". La méthode de calcul de ce programme est basée sur l'utilisation des formules de l'effet gravitationnel de prismes rectangulaires homogènes. Le pas de la grille du Modèle Numérique de Terrain (MNT) utilisé est de 0,00125° soit 4,5" en latitude et de 0,00166° soit 5,976" en longitude. La densité de la topographie a été considérée égale à 2,67 g/cm³.

On note que les δg corrigés de l'effet de la topographie pourraient être appelés *perturbations de Bouguer*, mais cette dénomination n'est pas encore apparue dans la littérature. Nous les nommons cartes de la *perturbation de gravité corrigées de l'effet de la topographie*.

- Figure 6.34 : effet de la topographie à l'altitude de vol calculé aux points de mesure,
- Figure 6.35 : perturbation de gravité à partir de l'équation simplifiée du gravimètre et corrigées de l'effet de la topographie à l'altitude de vol,
- Figure 6.36 : perturbation de gravité à partir de l'équation non-simplifiée du gravimètre (filtre moyenne glissante) et corrigées de l'effet de la topographie à l'altitude de vol,
- Figure 6.37 : perturbation de gravité à partir de l'équation non-simplifiée du gravimètre (filtre exponentiel) et corrigées de l'effet de la topographie à l'altitude de vol,
- Figure 6.38 : perturbation de gravité à partir de l'équation intégrale du gravimètre (regularisation d'Helmert) et corrigées de l'effet de la topographie à l'altitude de vol,
- Figure 6.39 : perturbation de gravité à partir de l'équation intégrale du gravimètre (regularisation de la courbe "L") et corrigées de l'effet de la topographie à l'altitude de vol.

La validation doit être faite par confrontation des données aérogravimétriques calculées à l'altitude de vol et prolongées depuis le sol. On remarque tout de suite qu'avec les cartes dont nous disposons nous ne comparons pas les mêmes quantités : c'est à dire "anomalie de gravité prolongée" et "perturbation de gravité calculée". La différence de ces deux quantités vient de leur définition et peut atteindre plusieurs milligals. Nous y reviendrons ci-après.

Une comparaison de ces deux quantités le long des profils de vol montre qu'une importante différence peut exister entre elles. La Figure 6.40 montre les anomalies de gravité prolongées à l'altitude de 5270 m, et les perturbations de gravité calculées avec les différentes méthodes de filtrage à l'altitude de vol le long du profil L01a. La Figure 6.41 montre la différence de ces quantités le long du profil L01a.

Un important biais systématique à grandes et moyennes longueurs d'onde est remarqué. Ce biais est certainement du aux anomalies prolongées, car les différentes courbes de

¹Bureau Gravimétrique International

la perturbation de gravité sont plus ou moins cohérentes entre elles. Verdun (2000) aussi constate la présence de cet écart. Selon lui cet écart vient, en grande partie, de la mauvaise description des grandes longueurs d'onde de l'anomalie prolongée. Il propose ensuite d'enlever ce biais des valeurs de l'anomalie prolongées (quantité constante) afin de pouvoir comparer courtes et moyennes longueurs d'onde. Ainsi, en observant que les écarts augmentent d'Ouest en l'Est et que la couverture des points mesurés au sol n'est pas suffisamment dense à l'Est, il conclut que cette différence est due au mauvais échantillonnage des anomalies terrestres. Nous avons observé également l'augmentation de la différence vers l'Est (plutôt à partir de la lignes L10a), en comparant par exemple les cartes 6.33 et 6.35.

Cette conclusion explique en partie la raison de la différence observée. Néanmoins, la méthode de prolongation peut à son tour être à l'origine de cet écart. L'application d'autres méthodes de prolongement comme l'intégrale de Poisson donnerait peut être d'autres résultats ; voir par exemple Hofmann-Wellenhof et Moritz (2005), Martince (1998) et Vaníček et al. (1996).

Les données terrestres et aéroportées ont des caractéristiques différentes. L'altitude des points terrestres est orthométrique, tandis que celle des points aéroportés est géodésique. Au niveau du contenu fréquentiel, les données aéroportées sont limitées par l'étendue de la région ainsi que par la distance entre les lignes de vol, tandis que pour les mesures terrestres cela varie d'une région à l'autre en fonction de la disponibilité des mesures. Plus important encore est la nature des quantités mesurées : au sol nous avons des anomalies de gravité Δg et à l'altitude de vol la perturbation de gravité δg . Une source de la différence que nous avons constaté entre les données prolongées et les données mesurées, ou au moins une partie de cette différence, vient du fait que nous avons comparé deux quantités différentes. La Figure 6.31 montre la géométrie de définition des quantités utilisés. Par définition nous avons

$$\Delta g_P = g_P - \gamma_Q \quad (6.6)$$

$$\delta g_P = g_P - \gamma_P \quad (6.7)$$

où P est un point sur le géoïde, Q est le point correspondant sur l'ellipsoïde de référence, et γ est la gravité normale. La différence de Δg_P et δg_P est $\gamma_P - \gamma_Q$. On peut écrire

$$\gamma_P - \gamma_Q \doteq \frac{\partial \gamma}{\partial h} N \quad (6.8)$$

où N est la hauteur du géoïde. En considérant le gradient de la gravité normale comme égal à $-0.308 \text{ mGal}/m$ pour une Terre sphérique, cette différence atteint 15 mGal pour $N = 50 \text{ m}$. Sachant que l'hauteur du géoïde dans la région étudiée est autour de 50 m , nous avons une différence importante entre les anomalies de gravité et les perturbations de gravité en fonction de l'hauteur du géoïde. Pour un processus de prolongement vers la haut, il faut donc transformer les anomalies en perturbations. Une méthode de transformation est expliquée par Hofmann-Wellenhof et Moritz (2005), pp. 242-246.

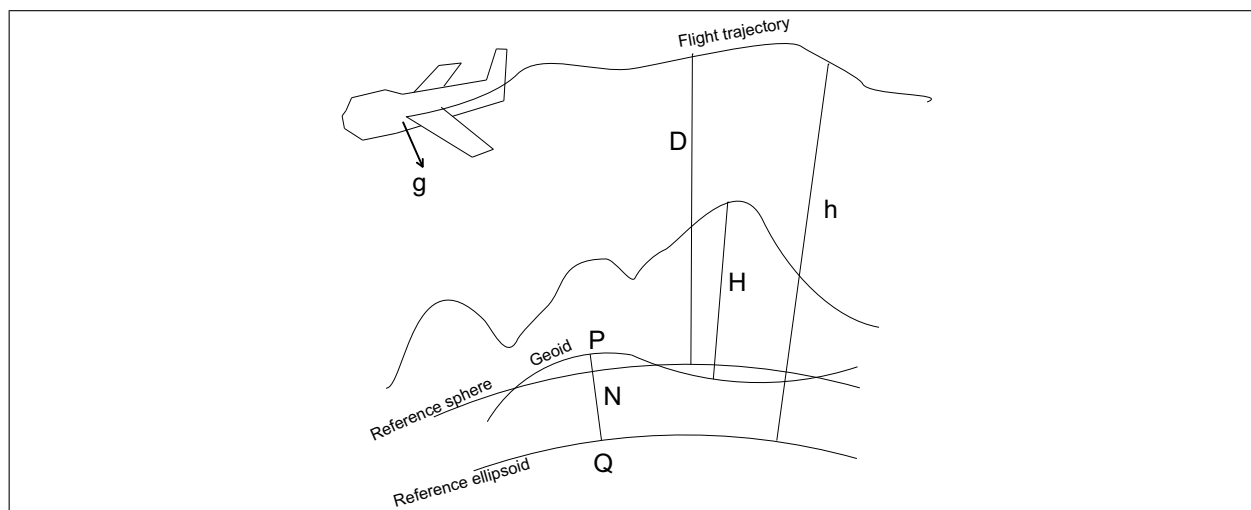


FIG. 6.31 – Géométrie pour la définition des anomalies.

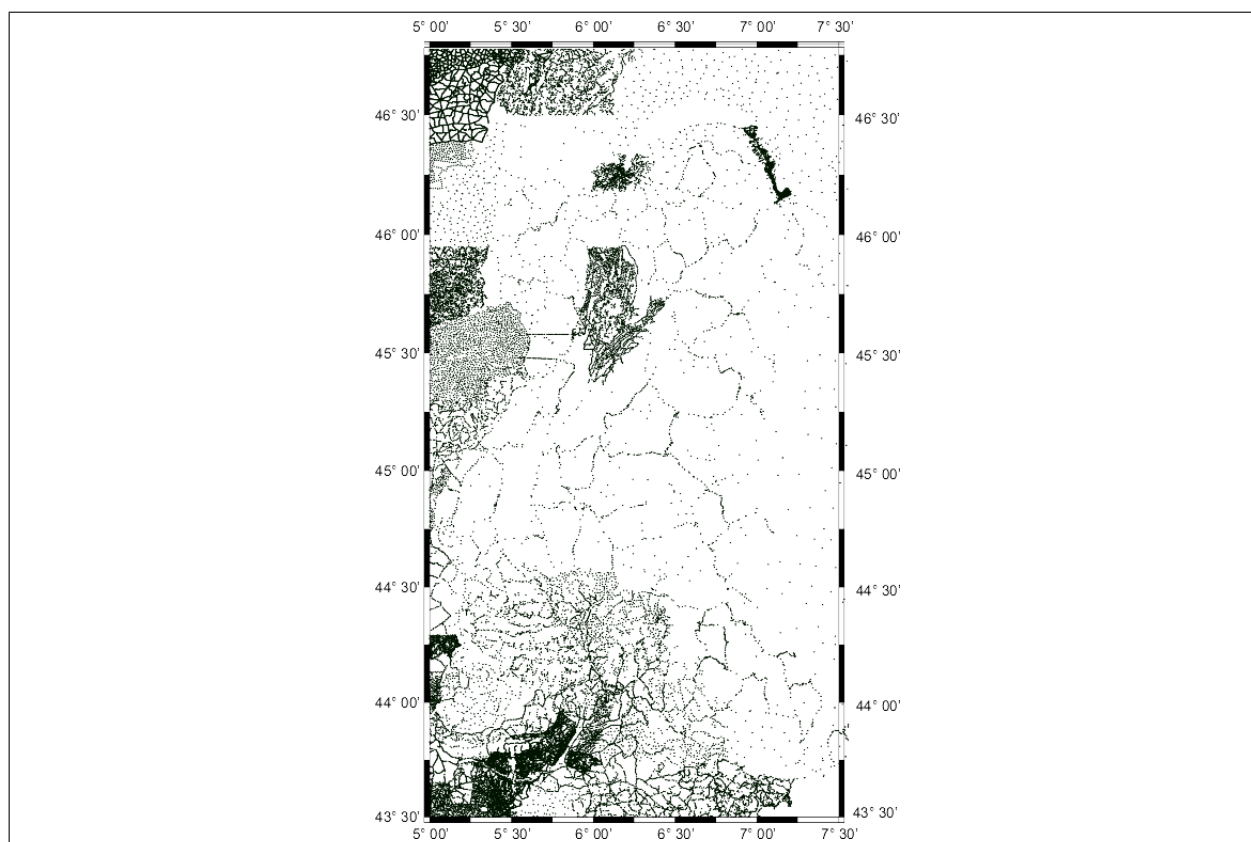


FIG. 6.32 – Couverture des mesures gravimétriques terrestre sur la région de mesure. Les données présentées correspondent aux données archivées au BGI.

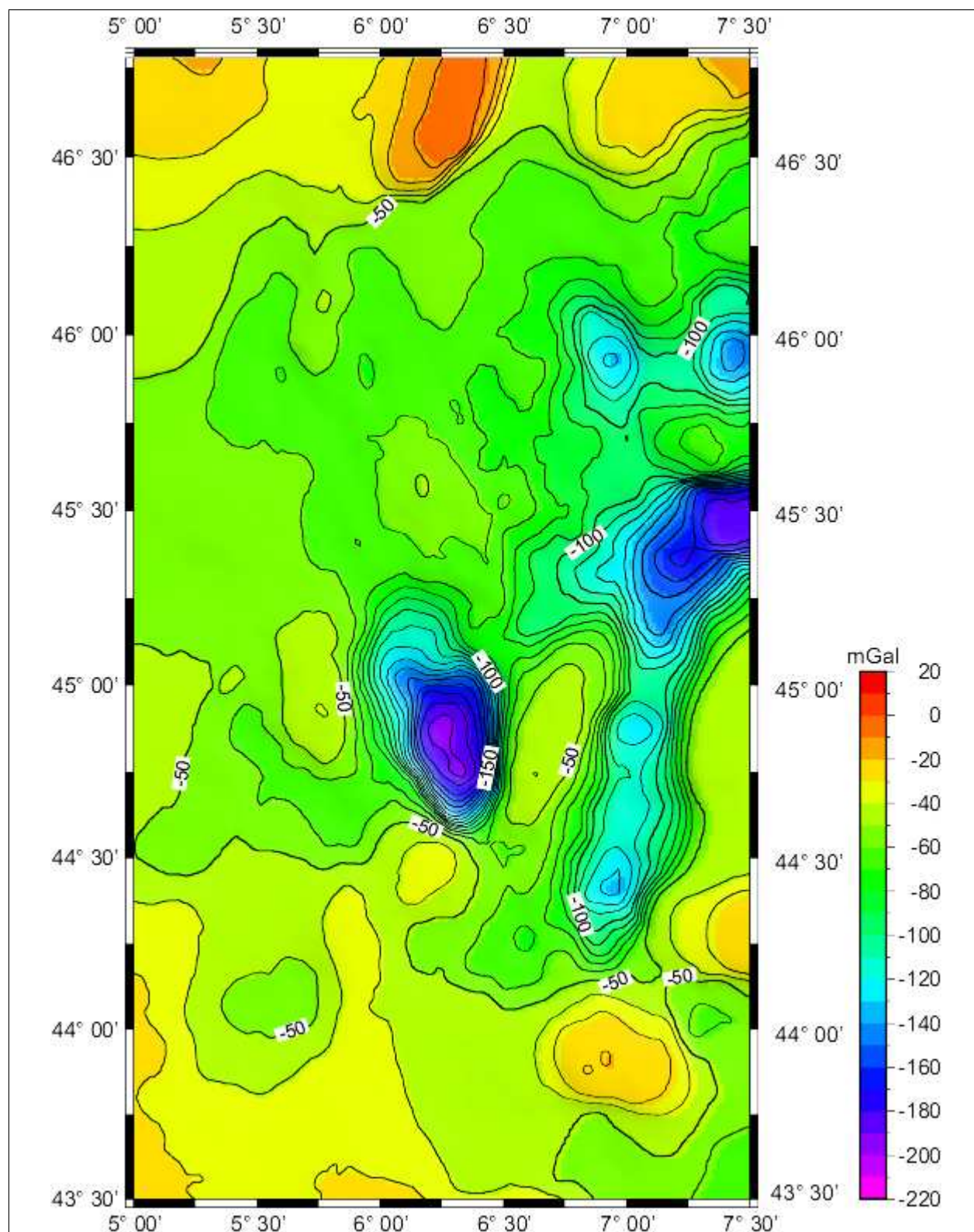


FIG. 6.33 — Carte des anomalies de Bouguer prolongées à l'altitude de 5270 *m*. D'après Verdun (2000) avec permission.

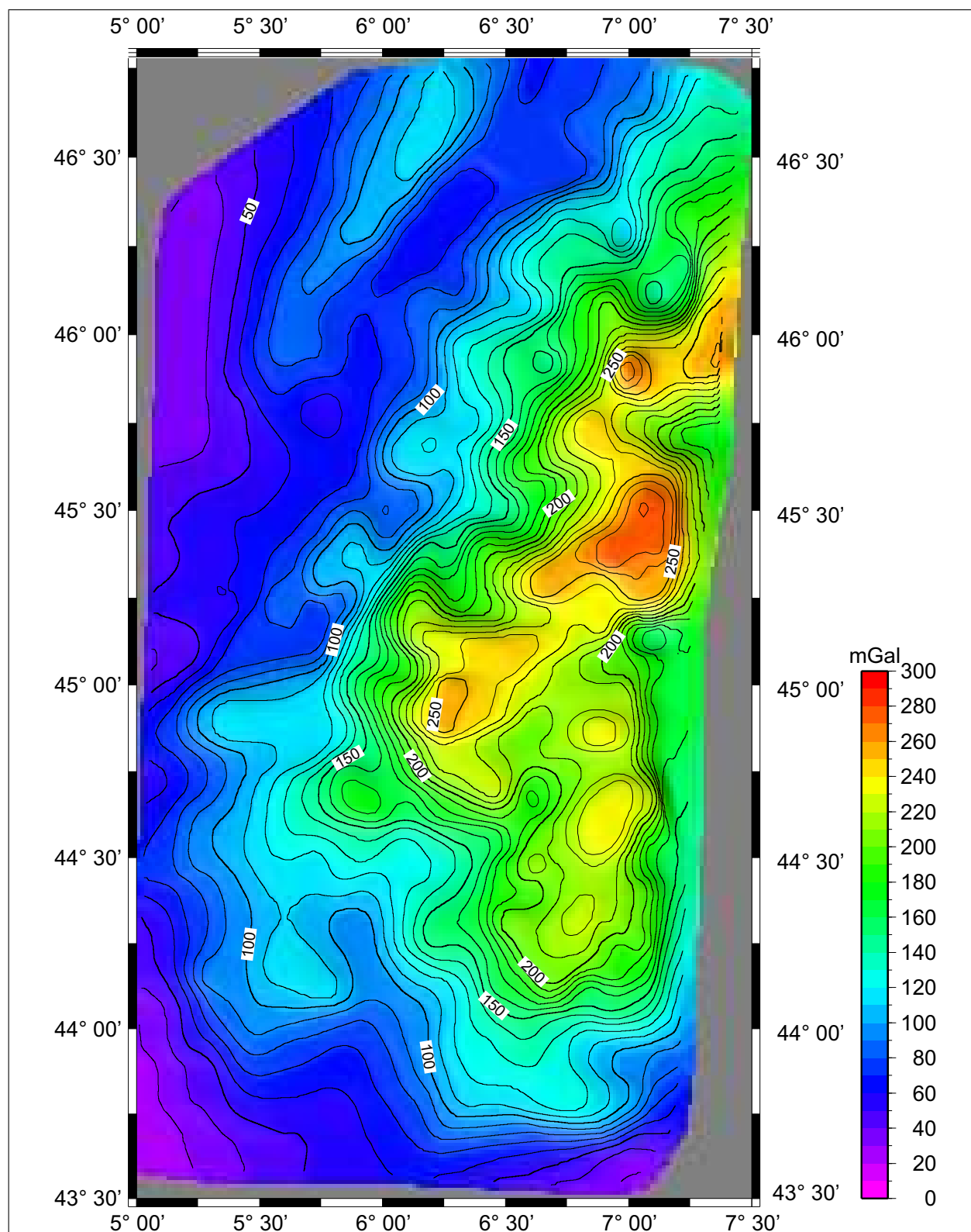


FIG. 6.34 – Effet de la topographie à l'altitude de vol calculé aux points de mesure en altitude à partir du logiciel GRAVSOFT (TC).

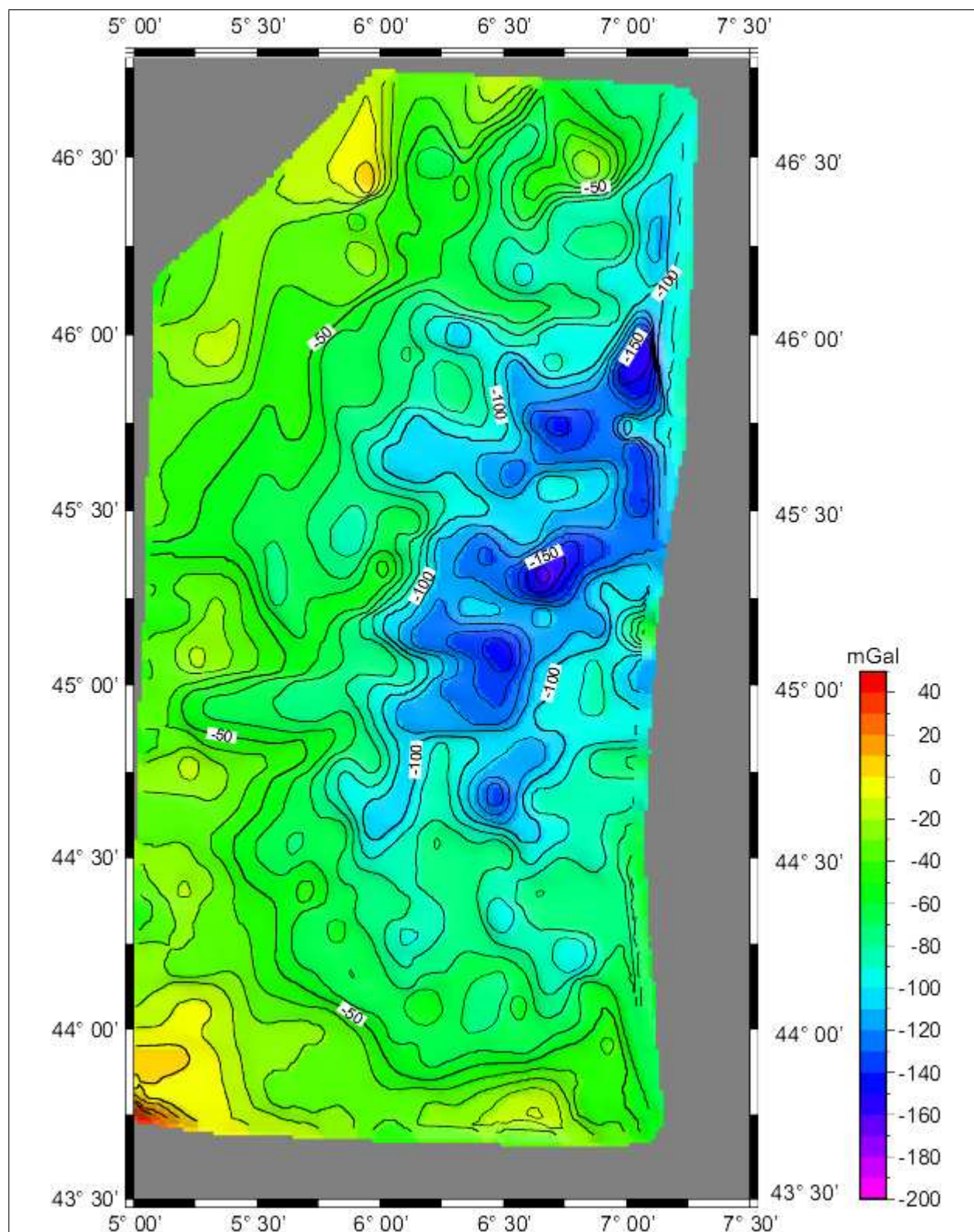


FIG. 6.35 – Carte des perturbations de gravité aérogravimétriques calculées selon l'équation simplifiée du gravimètre et corrigées de l'effet de la topographie à l'altitude de vol.

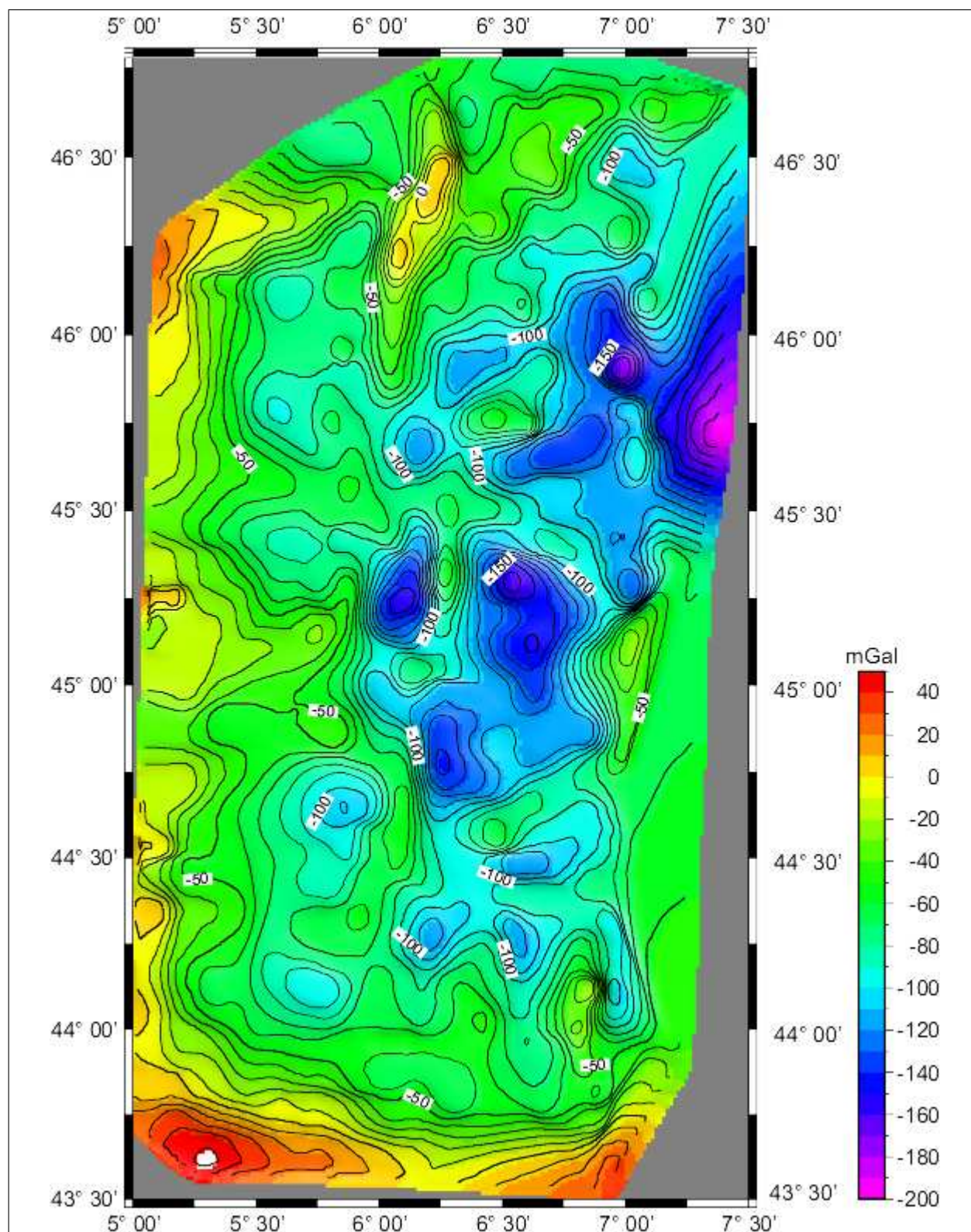


FIG. 6.36 – Carte des perturbations de gravité aérogravimétriques calculées selon l'équation non-simplifiée du gravimètre (filtre moyenne glissante) et corrigées de l'effet de la topographie à l'altitude de vol.

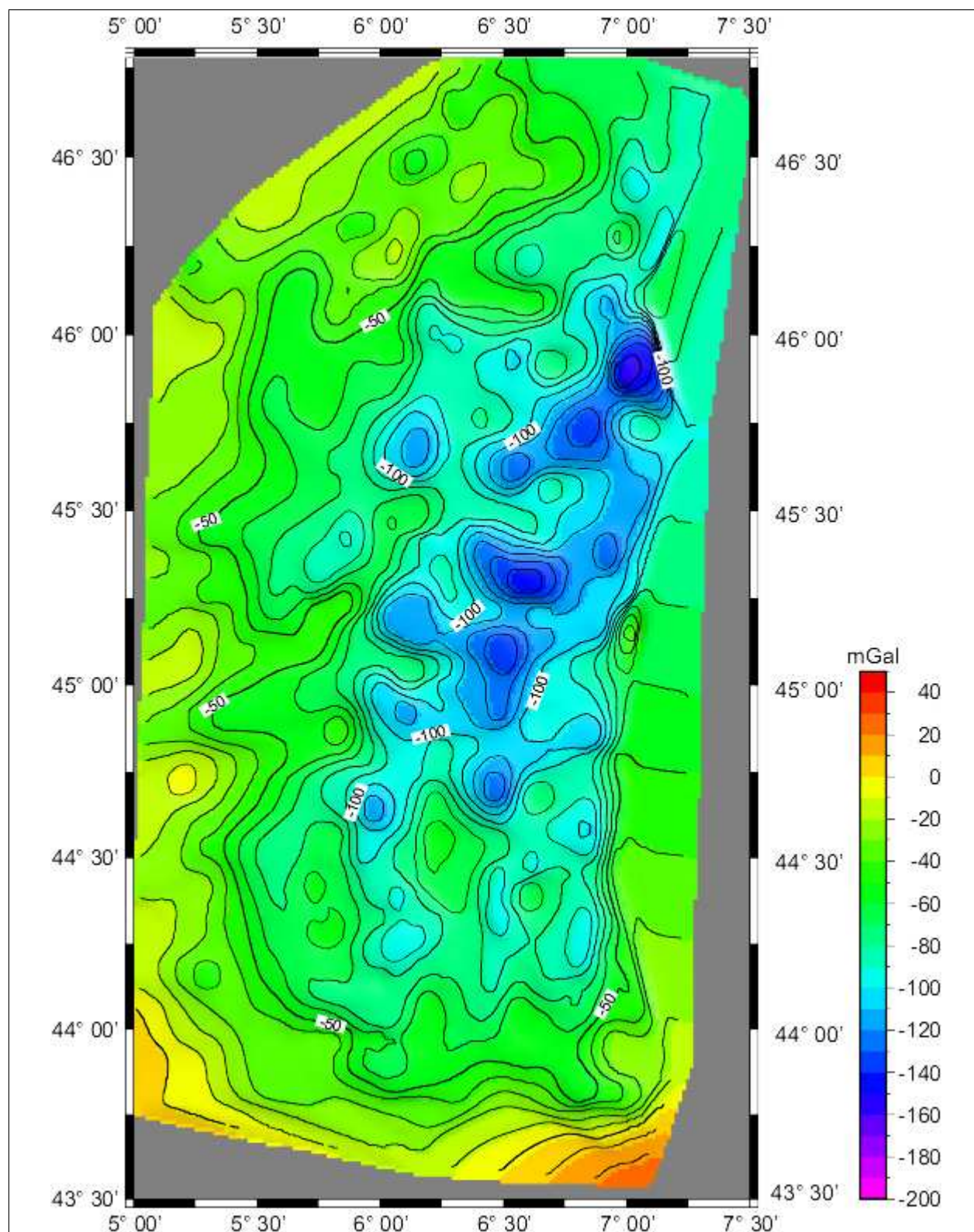


FIG. 6.37 – Carte des perturbations de gravité aérogravimétriques calculées selon l'équation non-simplifiée du gravimètre (filtre exponentiel) et corrigées de l'effet de la topographie à l'altitude de vol (résultats équivalents à ceux de Verdun (2000)).

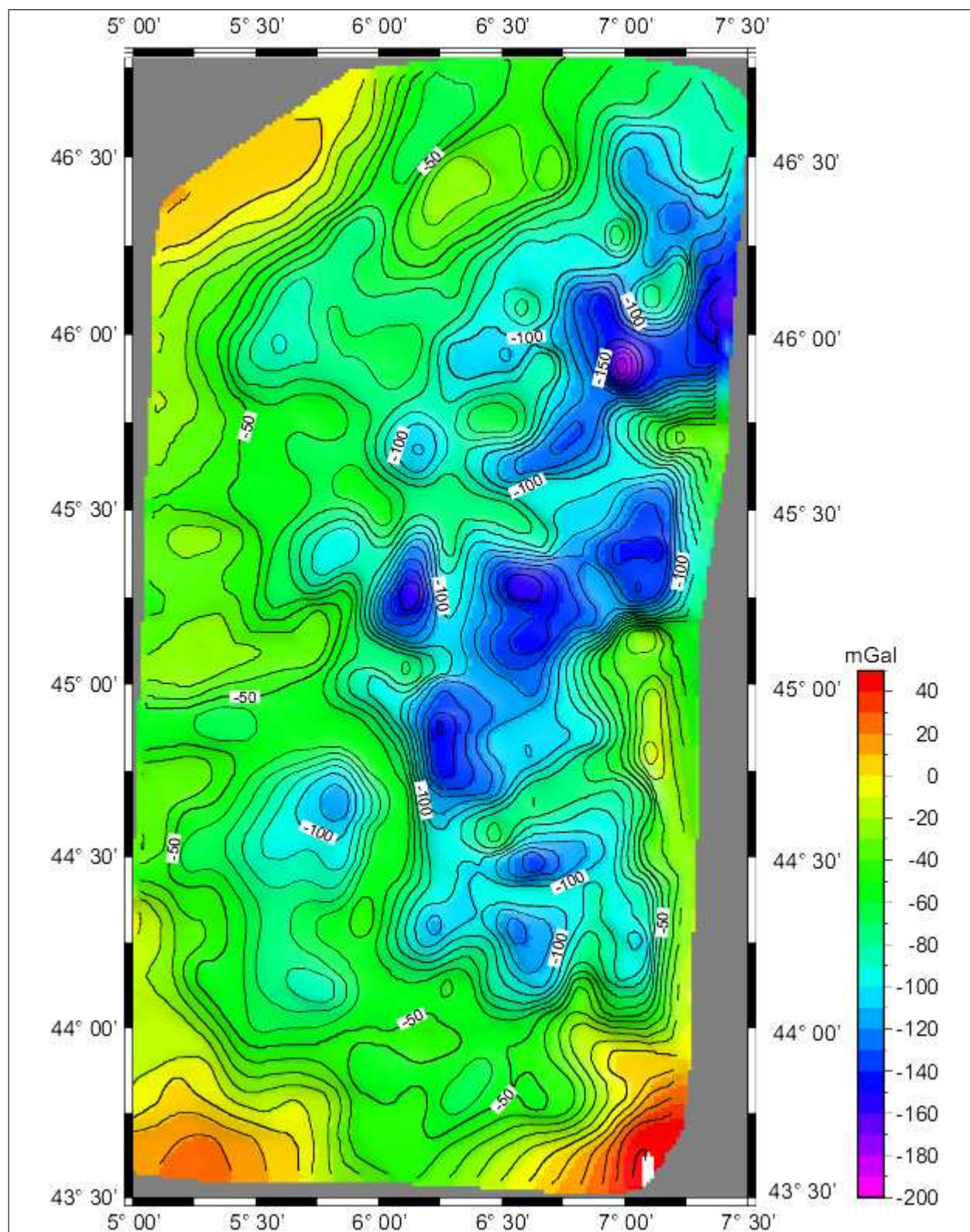


FIG. 6.38 – Carte des perturbations de gravité aérogravimétriques calculées selon l'équation intégrale du gravimètre (régularisation d'Helmert) et corrigées de l'effet de la topographie à l'altitude de vol.

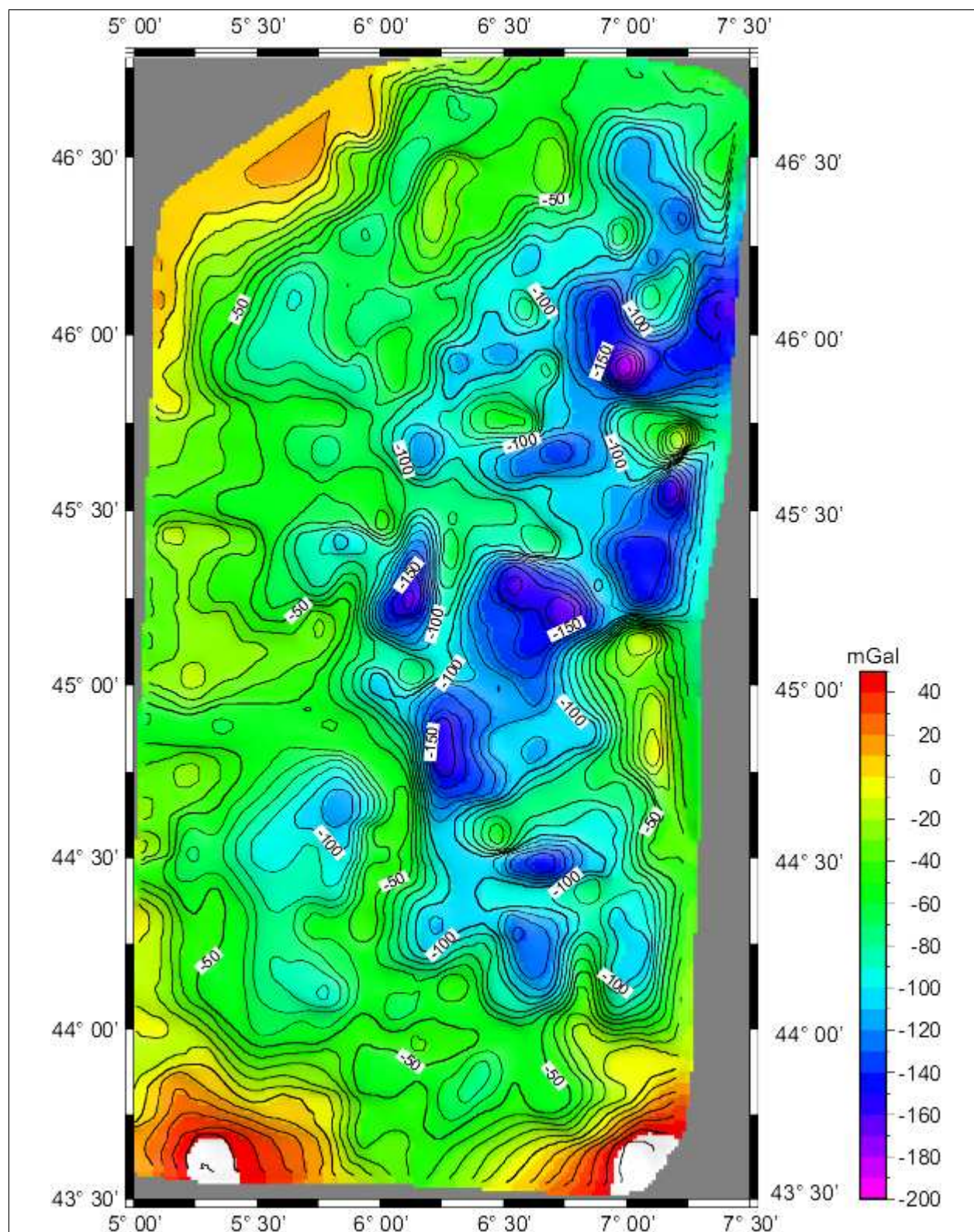


FIG. 6.39 – Carte des perturbations de gravité aérogravimétriques calculées selon l'équation intégrale du gravimètre (régularisation de la courbe "L") et corrigées de l'effet de la topographie à l'altitude de vol.

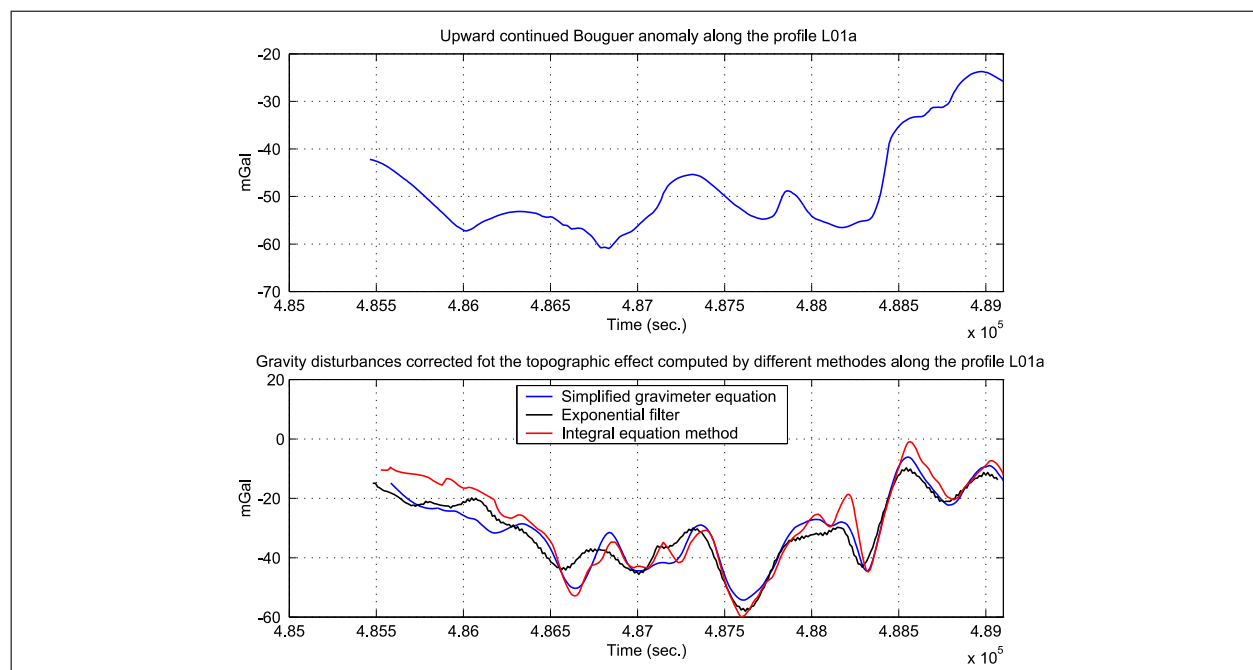


FIG. 6.40 – Anomalies de gravité prolongées à l'altitude de 5270 m , et perturbations de gravité aérogravimétriques calculées selon les différentes méthodes de filtrage à l'altitude de vol le long du profil L01a.

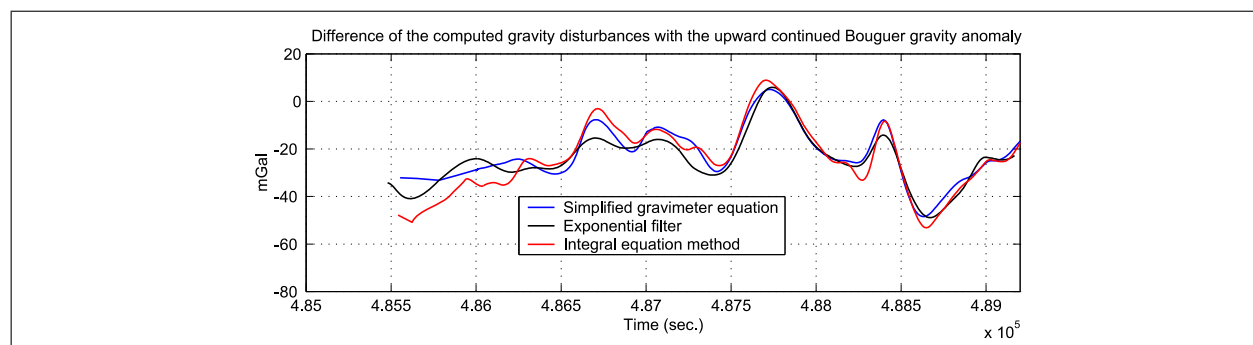


FIG. 6.41 – Différences des perturbations de gravité aérogravimétriques calculées selon les différentes méthodes de filtrage à l'altitude de vol le long du profil L01a et les anomalies de gravité prolongées à l'altitude de 5270 m (cf. Figure 6.40).

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

La gravimétrie mobile, notamment depuis un avion, est aujourd'hui un des sujets les plus attractifs dans la domaine de la recherche en géodésie car il reste encore beaucoup de sujets théoriques et pratiques à traiter jusqu'à l'obtention d'une précision égale ou meilleure que 1 *mGal*. Cette thèse présente les méthodes usuelles de réalisation des mesures, ainsi qu'une méthode nouvelle et originale basée sur l'inversion d'une équation intégrale. Les données utilisées sont des données acquises lors d'un levé aérogravimétrique sur les Alpes en 1998 avec un système gravimétrique LaCoste & Romberg modèle Air/Sea.

Le système gravimétrique LaCoste & Romberg modèle Air/Sea, que nous avons étudié est un gravimètre conçu à l'origine pour effectuer les mesures statiques au sol, modifié pour l'utilisation en gravimétrie mobile. Il montre une très bonne performance en gravimétrie aéroportée quand il est utilisé en vol stabilisé. Cependant, ce système n'arrive pas toujours à retrouver rapidement un état d'équilibre satisfaisant après les virages de l'avion. La durée de stabilisation est variable de quelques secondes à plusieurs minutes. Sur certaines lignes de vol, nous avons constaté que les mesures sur l'ensemble du profil ne sont pas utilisables, à cause de ce comportement. Néanmoins, dans des conditions normales sur un vol suffisamment stable, les résultats obtenus par ce système sont acceptables, voire d'une grande qualité.

Le nivellement du gravimètre à l'aide d'une plate-forme stabilisée est un sujet délicat. Selon les modèles de comportement proposés, la plate-forme du gravimètre LaCoste & Romberg montre la plupart du temps une erreur de moins de 1 *mGal* sur la gravité estimée pour les accélérations horizontales rencontrées en gravimétrie aéroportée. Néanmoins, l'utilisation de ces modèles de comportement de la plate-forme demande quelques précautions, notamment en ce qui concerne la détermination de la fonction du transfert pour les accélérations horizontales. Cette plate-forme doit aussi être étudiée finement pour la détermination de sa fonction de transfert pour les accélérations verticales, suivant différentes bandes de fréquence.

La littérature indique que les autres systèmes de mesures aérogravimétriques, notamment l'INS à axes liées, donnent aussi de bons résultats. Compte tenu du prix intéressant de ces systèmes de mesure, de plus en plus d'auteurs proposent de les utiliser en parallèle

à des systèmes aérogravimétriques du type LaCoste & Romberg. Nous avons ainsi accès à des sources de données indépendantes, et cela permet de comparer les deux types de mesures et éventuellement de trouver des solutions combinées.

Les mesures altimétriques effectuées par des altimètres laser font aussi partie des mesures aérogravimétriques. Théoriquement, elles pourraient servir à estimer l'accélération verticale de l'avion. Mais leur performance en gravimétrie aéroportée est trop limitée, à cause de la précision des modèles numériques de terrain. Pourtant, nous pensons que l'on pourrait proposer l'utilisation des observations d'altimétrie laser comme données auxiliaires à la trajectographie, comme les données GPS. On pourrait par exemple introduire les mesures altimétriques comme contraintes pour mieux déterminer les positions de l'avion, surtout dans de mauvaises conditions de mesures GPS.

En ce qui concerne la modélisation du système gravimétrique, la façon la plus rigoureuse de faire est d'écrire la deuxième loi de Newton dans le référentiel quasi-inertiel de Copernic pour en déduire l'équation fondamentale de la gravimétrie mobile, puis d'exprimer cette dernière dans le référentiel du capteur gravimétrique. C'est ce que nous avons fait pour obtenir une version légèrement modifiée de l'équation différentielle originale de LaCoste (1967). Cette équation modifiée demande une modélisation de l'ensemble de la plate-forme/capteur sous la forme d'une fonction de transfert.

Grâce à cette modélisation, nous avons obtenu également une expression pour l'accélération parasite due au bras de levier, qui est le vecteur entre l'antenne principale GPS et le centre de la masse du capteur gravimétrique. Dans la littérature, cette accélération est souvent considérée comme négligeable. L'évaluation de cet effet nécessite des données précises à chaque instant sur l'attitude de l'avion, que l'on obtient à partir des mesures gyroscopiques ou à partir du traitement simultané des coordonnées des antennes installées sur l'avion.

Le calcul de l'accélération de gravité à partir des mesures aérogravimétriques est souvent fait par filtrage direct en domaine fréquentiel sur des séries temporelles très bruitées, et cela pour chaque ligne de vol. Ce filtrage est délicat car il faut trouver un compromis entre degré de lissage et résolution du signal gravimétrique. Nous avons pour notre part développé une autre méthode de filtrage qui non seulement traite l'ensemble des profils de vol en une seule fois, mais qui est aussi capable de prendre en compte les propriétés statistiques des différents types de mesures à travers des matrices de covariance associées. Cette méthode, basée sur la transformation de l'équation différentielle du gravimètre en équation intégrale, est résolue au sens des moindres carrés en introduisant une matrice de covariance a priori des perturbations de gravité calculées à partir des modèles géopotentiels. La fonction de covariance utilisée est une fonction isotrope ne prenant pas en compte les différences d'altitude des points. En effet, les données étant acquises plus ou moins à la même altitude de vol, le gradient vertical de la perturbation de gravité entre lignes de vol affecte peu les estimations produites du champ de gravité.

Notre modélisation par l'équation intégrale du gravimètre nécessite également l'introduction de matrices de covariance a priori des différentes observables qui interviennent

directement ou indirectement dans le processus. Notamment, les matrices de covariance de l'accélération d'Eötvös et de l'accélération verticale de l'avion ressentie par le gravimètre entrent dans la modélisation. Pour l'accélération verticale de l'avion, nous avons développé une méthode de calcul qui est également basée sur la transformation de l'équation différentielle en équation intégrale. Cette méthode non seulement nous donne l'accélération verticale de l'avion mais aussi sa matrice de covariance a posteriori. Cette matrice est ensuite propagée par la fonction de transfert du gravimètre pour devenir la matrice de covariance de l'accélération verticale ressentie par le capteur gravimétrique. Pour l'accélération d'Eötvös, le problème est plus délicat et non linéaire. Pour le traiter, nous avons utilisé une méthode d'estimation statistique.

Un grand avantage de notre méthode d'inversion par équation intégrale est qu'elle donne de plus accès à la matrice de covariance a posteriori des inconnues. Cette matrice peut être considérée comme un indicateur interne de la précision du levé aérogravimétrique. Contrairement à l'analyse des écarts aux points de croisement qui dépend totalement du degré de lissage des séries temporelles, la matrice de covariance a posteriori reflète la propagation des erreurs à travers le modèle physique et mathématique.

La méthode de l'équation intégrale nous permet également d'ajouter d'autres sources d'information aux équations d'observation, telles que les équations de contrainte aux points de croisement.

La validation du levé peut être faite soit par des critères intrinsèques, comme les matrices de covariance a posteriori, soit par des critères externes qui indiquent l'exactitude du levé. La matrice de covariance a posteriori des perturbations de gravité estimées montre des écarts types allant de moins de 3 *mGal* jusqu'à plus de 7 *mGal*. Les meilleurs précisions correspondent aux voisinages des points de croisement situés au centre de la région de mesure. Les plus grandes variances des perturbations de gravité correspondent aux bordures de la région de mesure, et cela à cause du processus de la régularisation de l'équation intégrale.

La seule source de données qui nous donne la possibilité d'avoir un critère externe de l'exactitude du levé est l'anomalie de gravité mesurée au sol et prolongée jusqu'à l'altitude de vol. Cependant, l'anomalie de gravité utilisée en gravimétrie terrestre est une quantité différente de la perturbation de gravité utilisée en gravimétrie aéroportée. La différence des deux quantités peut atteindre plusieurs *mGal* en fonction de la hauteur du géoïde (≈ 15 *mGal* pour une hauteur du géoïde de 50 *m*). Rigoureusement, il faudrait d'abord transformer les anomalies de gravité en perturbations de gravité, puis les prolonger vers le haut. La méthode de prolongation ainsi que la distribution spatiale des données au sol, ici restreintes aux fonds de vallée, sont des paramètres importants pour la qualité du champ prolongé.

La comparaison avec les données gravimétriques de surface prolongées vers le haut par Verdun (2000) montre des écarts difficilement compréhensibles, à grande et moyenne longueurs d'ondes, très probablement attribuables au processus de prolongement vers le haut utilisé. Il faudrait donc reprendre ce travail pour effectuer une comparaison valable,

mais nous n'avons pu le faire faute de temps. Il pourrait constituer à lui seul une partie substantielle d'un futur travail de thèse.

VITESSE ET ACCÉLÉRATION DANS LE CAS DE CHANGEMENT DE REPÈRE

Considérons deux repères R_0 'fixe' et R_1 'mobile' (Figure A.1) de centres O et O' respectivement. Les vecteurs de base pour le repère R_0 sont $\hat{\mathbf{X}}_i$ et pour R_1 sont $\hat{\mathbf{x}}_i, i = 1, 2, 3$. Le vecteur de la position d'un point P est représenté par

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O'P} &= \sum X_i \hat{\mathbf{X}}_i \\ &= \sum x_i \hat{\mathbf{x}}_i \\ &= \overrightarrow{\mathbf{r}}\end{aligned}$$

où X_i et $x_i, i = 1, 2, 3$ sont les coordonnées du point P dans les deux repères. Nous avons

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{\mathbf{r}} \quad (\text{A.1})$$

Les coordonnées de \overrightarrow{OP} , $\overrightarrow{OO'}$ et $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ sont représentées soit toutes dans le repère R_0 , soit toutes dans le repère R_1 .

Une différentiation de (A.1) par rapport au temps dans le référentiel R_0 , nous donne

$$\left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} \right)_{R_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \right)_{R_0} + \left(\frac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{dt} \right)_{R_0} \quad (\text{A.2})$$

On considère que les coordonnées des vecteurs sont données dans le repère R_0 . En notant $d\overrightarrow{OP}/dt = \overrightarrow{\mathbf{V}}_{P/R_0}$, la vitesse du point P par rapport au repère fixe, et $d\overrightarrow{OO'}/dt = \overrightarrow{\mathbf{V}}_{O'/R_0}$, la vitesse de translation du repère R_1 par rapport au repère R_0 , l'Equation (A.2) s'écrit sous la forme

$$\overrightarrow{\mathbf{V}}_{P/R_0} = \overrightarrow{\mathbf{V}}_{O'/R_0} + \left(\frac{d\overrightarrow{\mathbf{r}}}{dt} \right)_{R_0} \quad (\text{A.3})$$

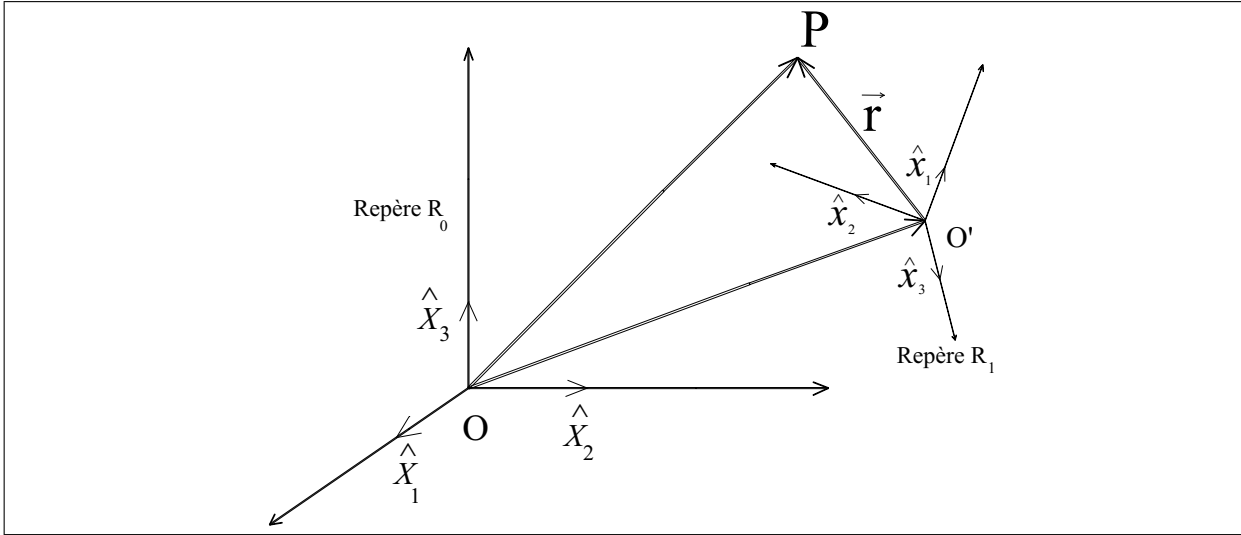


FIG. A.1 – On considère que le repère R_1 est en mouvement par rapport au repère R_0

On peut écrire également

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{R_0} &= \left(\frac{d \sum X_i \hat{X}_i}{dt} \right)_{R_0} \\
 &= \left(\frac{d \sum x_i \hat{x}_i}{dt} \right)_{R_0} \\
 &= \sum \frac{dx_i}{dt} \hat{x}_i + \sum x_i \frac{d\hat{x}_i}{dt} \\
 &= \left(\frac{d\vec{r}^{R_1}}{dt} \right)_{R_1} + \vec{\omega}_{R_1/R_0}^{R_1} \times \vec{r}^{R_1} \\
 &= \vec{V}_{P/R_1} + \vec{\omega}_{R_1/R_0}^{R_1} \times \vec{r}^{R_1}
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

où " \times " désigne le produit vectoriel, \vec{V}_{P/R_1} est la vitesse du point P dans le repère mobile et $\vec{\omega}_{R_1/R_0}^{R_1}$ est le vecteur de rotation de R_1 par rapport à R_0 et qui représente la vitesse angulaire de cette rotation. L'indice supérieur R_1 signifie que les composantes du vecteur $\vec{\omega}_{R_1/R_0}$ sont exprimées dans le repère R_1 .

La notation $[\vec{\omega}_{R_1/R_0}^{R_1} \times]$ peut être remplacée par une matrice anti-symétrique de la forme [Kwon (2000)]

$$\mathbf{A}_{R_1/R_0}^{R_1} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.5}$$

où ω_1 , ω_2 et ω_3 sont des composantes du vecteur $\vec{\omega}_{R_1/R_0}^{R_1}$. L'Equation (A.4) dans cette

notation devient

$$\left(\frac{d\vec{\mathbf{r}}^{\mathbf{R}_0}}{dt} \right)_{\mathbf{R}_0} = \vec{\mathbf{V}}_{P/\mathbf{R}_1} + \mathbf{A}_{\mathbf{R}_1/\mathbf{R}_0}^{\mathbf{R}_1} \vec{\mathbf{r}}^{\mathbf{R}_1} \quad (\text{A.6})$$

Finalement, le remplacement de (A.4) dans (A.3) nous donne

$$\vec{\mathbf{V}}_{P/\mathbf{R}_0} = \vec{\mathbf{V}}_{P/\mathbf{R}_1} + \underbrace{\vec{\mathbf{V}}_{O'/\mathbf{R}_0} + \vec{\omega}_{\mathbf{R}_1/\mathbf{R}_0}^{\mathbf{R}_1} \times \vec{\mathbf{r}}^{\mathbf{R}_1}}_{\vec{\mathbf{V}}_{P,\mathbf{R}_1/\mathbf{R}_0}}$$

\Rightarrow

$$\boxed{\vec{\mathbf{V}}_{P/\mathbf{R}_0} = \vec{\mathbf{V}}_{P/\mathbf{R}_1} + \vec{\mathbf{V}}_{P,\mathbf{R}_1/\mathbf{R}_0}} \quad (\text{A.7})$$

ici $\vec{\mathbf{V}}_{P,\mathbf{R}_1/\mathbf{R}_0}$ est la *vitesse d'entraînement*, "vitesse du point P due au mouvement du repère \mathbf{R}_1 par rapport au repère \mathbf{R}_0 ". Pour simplifier on note désormais $\vec{\omega}$ au lieu de $\vec{\omega}_{\mathbf{R}_1/\mathbf{R}_0}^{\mathbf{R}_1}$.

On dérive (A.7) par rapport au temps dans \mathbf{R}_0 :

$$\underbrace{\left(\frac{d}{dt} \vec{\mathbf{V}}_{P/\mathbf{R}_0} \right)_{\mathbf{R}_0}}_{(1)} = \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \vec{\mathbf{V}}_{P/\mathbf{R}_1} \right)_{\mathbf{R}_0}}_{(2)} + \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \vec{\mathbf{V}}_{O'/\mathbf{R}_0} \right)_{\mathbf{R}_0}}_{(3)} + \underbrace{\left(\frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}}^{\mathbf{R}_1}) \right)_{\mathbf{R}_0}}_{(4)} \quad (\text{A.8})$$

Regardons chaque terme de cette équation de plus près :

- (1)

$$\left(\frac{d}{dt} \vec{\mathbf{V}}_{P/\mathbf{R}_0} \right)_{\mathbf{R}_0} = \vec{\Gamma}_{P/\mathbf{R}_0} \quad (\text{A.9})$$

est l'accélération de P dans le repère fixe.

- (2) De façon similaire à la procédure que nous avons suivie pour (A.4), nous avons

$$\left(\frac{d}{dt} \vec{\mathbf{V}}_{P/\mathbf{R}_1} \right)_{\mathbf{R}_0} = \left(\frac{d}{dt} \vec{\mathbf{V}}_{P/\mathbf{R}_1} \right)_{\mathbf{R}_1} + \vec{\omega} \times \vec{\mathbf{V}}_{P/\mathbf{R}_1} \quad (\text{A.10})$$

avec

$$\left(\frac{d}{dt} \vec{\mathbf{V}}_{P/\mathbf{R}_1} \right)_{\mathbf{R}_1} = \vec{\Gamma}_{P/\mathbf{R}_1} \quad (\text{A.11})$$

qui est l'accélération de P dans le repère mobile,

- (3)

$$\left(\frac{d}{dt} \vec{\mathbf{V}}_{O'/\mathbf{R}_0} \right)_{\mathbf{R}_0} = \vec{\Gamma}_{O'/\mathbf{R}_0} \quad (\text{A.12})$$

est l'accélération de l'origine du repère mobile dans le repère fixe.

• (4)

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}^{R_1}) \right)_{R_0} &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}^{R_1} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}^{R_1}}{dt} \right)_{R_0} \\
 &= \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}^{R_1} + \vec{\omega} \times \left[\vec{V}_{P/R_1} + \vec{\omega} \times \vec{r}^{R_1} \right] \\
 &= \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}^{R_1} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{P/R_1} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{R_1}) \quad (A.13)
 \end{aligned}$$

Finalement, en remplaçant toutes ces équations en (A.8), nous obtenons

$$\boxed{\vec{I}_{P/R_0} = \vec{I}_{P/R_1} + \vec{I}_{O'/R_0} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}^{R_1} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{P/R_1} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{R_1})} \quad (A.14)$$

DÉVELOPPEMENT DES TERMES DE L'EQUATION (3.13) : LE GRAVIMÈTRE DANS LE REPÈRE DE COPERNIC

L'Equation (3.13) est

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{P/C} \right)_C}_{(1)} &= \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{P/M} \right)_C}_{(2)} + \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{P,M/GR} \right)_C}_{(3)} + \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{P,GR/LG} \right)_C}_{(4)} \\
 &+ \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{P,LG/CT} \right)_C}_{(5)} + \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{P,CT/IN} \right)_C}_{(6)} + \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{P,IN/C} \right)_C}_{(7)} \quad (B.1)
 \end{aligned}$$

On développe chaque terme de cette équation :

• (1) ier terme

$$\left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{P/C} \right)_C = \vec{\Gamma}_{P/C} \quad (B.2)$$

Ici $\vec{\Gamma}_{P/C}$ signifie l'accélération du point P dans le repère C .

• (2) ième terme

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{P/M} \right)_C &= \left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{P/M} \right)_M + \vec{\omega}_{M/C}^M \times \vec{V}_{P/M} \\
 &= \vec{\Gamma}_{P/M} + \vec{\omega}_{M/C}^M \times \vec{V}_{P/M} \quad (B.3)
 \end{aligned}$$

$\vec{\Gamma}_{P/M}$ signifie l'accélération de la masse d'épreuve dans le repère de mesure M . $\vec{\omega}_{M/C}^M$ est le vecteur de rotation du repère du gravimètre M , par rapport au repère de Copernic C . Il

peut être écrit comme la somme des vecteurs de rotations des différents repères l'un par rapport à l'autre :

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_{M/C}^M &= \vec{\omega}_{M/GR}^M + \vec{\omega}_{GR/LG}^M + \vec{\omega}_{LG/CT}^M + \underbrace{\vec{\omega}_{CT/IN}^M}_{=\vec{\Omega}^M} + \underbrace{\vec{\omega}_{IN/C}^M}_{=0} \\ &= \vec{\omega}_{M/GR}^M + \vec{\omega}_{GR/LG}^M + \vec{\omega}_{LG/CT}^M + \vec{\Omega}^M\end{aligned}\quad (B.4)$$

• (3) ième terme

$$\left(\frac{d}{dt}\vec{V}_{P,M/GR}\right)_C = \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\vec{V}_{P,M/GR}\right)_{GR}}_{(*)} + \underbrace{\vec{\omega}_{GR/C}^{GR} \times \vec{V}_{P,M/GR}}_{(**)} \quad (B.5)$$

(*)▷

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}\vec{V}_{P,M/GR}\right)_{GR} &= \left(\frac{d}{dt}(\vec{V}_{O/GR} + \vec{\omega}_{M/GR}^M \times \vec{OP}^M)\right)_{GR} \\ &= \left(\frac{d}{dt}\vec{V}_{O/GR}\right)_{GR} + \left(\frac{d}{dt}(\vec{\omega}_{M/GR}^M \times \vec{OP}^M)\right)_{GR} \\ &= \vec{I}_{O/GR} + \left(\frac{d}{dt}(\vec{\omega}_{M/GR}^M \times \vec{OP}^M)\right)_M + \vec{\omega}_{M/GR}^M \times (\vec{\omega}_{M/GR}^M \times \vec{OP}^M) \\ &= \vec{I}_{O/GR} + \dot{\vec{\omega}}_{M/GR}^M \times \vec{OP}^M + \vec{\omega}_{M/GR}^M \times \vec{V}_{P/M} \\ &\quad + \vec{\omega}_{M/GR}^M \times (\vec{\omega}_{M/GR}^M \times \vec{OP}^M)\end{aligned}\quad (B.6)$$

(**)▷

$$\vec{\omega}_{GR/C}^{GR} \times \vec{V}_{P,M/GR} = (\vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} + \vec{\omega}_{LG/CT}^{GR} + \vec{\Omega}^{GR}) \times (\vec{V}_{O/GR} + \vec{\omega}_{M/GR}^M \times \vec{OP}^M) \quad (B.7)$$

En mettant (B.6) et (B.7) en (B.5) on obtient

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}\vec{V}_{P,M/GR}\right)_C &= \vec{I}_{O/GR} + \dot{\vec{\omega}}_{M/GR}^M \times \vec{OP}^M + \vec{\omega}_{M/GR}^M \times \vec{V}_{P/M} \\ &\quad + (\vec{\omega}_{M/GR}^M + \vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} + \vec{\omega}_{LG/CT}^{GR} + \vec{\Omega}^{GR}) \times (\vec{\omega}_{M/GR}^M \times \vec{OP}^M) \\ &\quad + (\vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} + \vec{\omega}_{LG/CT}^{GR} + \vec{\Omega}^{GR}) \times \vec{V}_{O/GR}\end{aligned}\quad (B.8)$$

• (4) ième terme

$$\left(\frac{d}{dt}\vec{V}_{P,GR/LG}\right)_C = \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\vec{V}_{P,GR/LG}\right)_{LG}}_{(*)} + \underbrace{\vec{\omega}_{LG/C}^{LG} \times \vec{V}_{P,GR/LG}}_{(**)} \quad (B.9)$$

(*)▷

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{P,GR/LG} \right)_{LG} &= \left(\frac{d}{dt} (\vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} \times \overrightarrow{BP}^{GR}) \right)_{LG} \\
 &= \left(\frac{d}{dt} (\vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} \times \overrightarrow{BP}^{GR}) \right)_{GR} + \vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} \times (\vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} \times \overrightarrow{BP}^{GR}) \\
 &= \dot{\vec{\omega}}_{GR/LG}^{GR} \times \overrightarrow{BP}^{GR} + \vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} \times \underbrace{\left(\frac{d\overrightarrow{BP}^{GR}}{dt} \right)_{GR}}_{(***)} \\
 &\quad + \vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} \times (\vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} \times \overrightarrow{BP}^{GR})
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

(***)▷

En utilisant l'Equation (A.7) nous avons

$$\left(\frac{d\overrightarrow{BP}^{GR}}{dt} \right)_{GR} = \vec{V}_{O/GR} + \vec{V}_{P/M} + \vec{\omega}_{M/GR}^M \times \overrightarrow{OP}^M \tag{B.11}$$

On remplace (B.11) en (B.10) :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{P,GR/LG} \right)_{LG} &= \dot{\vec{\omega}}_{GR/LG}^{GR} \times \overrightarrow{BP}^{GR} + \vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} \times (\vec{V}_{O/GR} + \vec{V}_{P/M} + \vec{\omega}_{M/GR}^M \times \overrightarrow{OP}^M) \\
 &\quad + \vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} \times (\vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} \times \overrightarrow{BP}^{GR})
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

(**)▷

$$\vec{\omega}_{LG/C}^{LG} \times \vec{V}_{P,GR/LG} = (\vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} + \vec{\Omega}^{LG}) \times (\vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} \times \overrightarrow{BP}^{GR}) \tag{B.13}$$

Le remplacement de (B.12) et (B.13) en (B.9) donne

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{P,GR/LG} \right)_C &= \dot{\vec{\omega}}_{GR/LG}^{GR} \times \overrightarrow{BP}^{GR} + \vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} \times (\vec{V}_{O/GR} + \vec{V}_{P/M} + \vec{\omega}_{M/GR}^M \times \overrightarrow{OP}^M) \\
 &\quad + (\vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} + \vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} + \vec{\Omega}^{LG}) \times (\vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} \times \overrightarrow{BP}^{GR})
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

• (5) ième terme

$$\left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{P,LG/CT} \right)_C = \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{P,LG/CT} \right)_{CT}}_{(*)} + \underbrace{\vec{\omega}_{CT/C}^{CT} \times \vec{V}_{P,LG/CT}}_{(**)} \tag{B.15}$$

(*)▷

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{P, LG/CT} \right)_{CT} &= \left(\frac{d}{dt} (\vec{V}_{A/CT} + \vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} \times \overrightarrow{AP}^{LG}) \right)_{CT} \\
 &= \left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{A/CT} \right)_{CT} + \left(\frac{d}{dt} (\vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} \times \overrightarrow{AP}^{LG}) \right)_{CT} \\
 &= \vec{\Gamma}_{A/CT} + \left(\frac{d}{dt} (\vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} \times \overrightarrow{AP}^{LG}) \right)_{LG} + \vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} \times (\vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} \times \overrightarrow{AP}^{LG}) \\
 &= \vec{\Gamma}_{A/CT} + \dot{\vec{\omega}}_{LG/CT}^{LG} \times \overrightarrow{AP}^{LG} + \underbrace{\vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} \times \left(\frac{d\overrightarrow{AP}^{LG}}{dt} \right)_{LG}}_{(***)} \\
 &\quad + \vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} \times (\vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} \times \overrightarrow{AP}^{LG}) \tag{B.16}
 \end{aligned}$$

(***)▷

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d\overrightarrow{AP}^{LG}}{dt} \right)_{LG} &= \underbrace{\left(\frac{d\overrightarrow{AB}^{LG}}{dt} \right)_{LG}}_{=\vec{0}} + \left(\frac{d\overrightarrow{BP}^{LG}}{dt} \right)_{LG} \\
 &= \left(\frac{d\overrightarrow{BP}^{GR}}{dt} \right)_{GR} + \vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} \times \overrightarrow{BP}^{GR} \\
 &= \vec{V}_{O/GR} + \vec{V}_{P/M} + \vec{\omega}_{M/GR}^M \times \overrightarrow{OP}^M + \vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} \times \overrightarrow{BP}^{GR} \tag{B.17}
 \end{aligned}$$

Par conséquence (B.16) devient

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{P, LG/CT} \right)_{CT} &= \vec{\Gamma}_{A/CT} + \dot{\vec{\omega}}_{LG/CT}^{LG} \times \overrightarrow{AP}^{LG} \\
 &\quad + \vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} \times (\vec{V}_{O/GR} + \vec{V}_{P/M} + \vec{\omega}_{M/GR}^M \times \overrightarrow{OP}^M + \vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} \times \overrightarrow{BP}^{GR}) \\
 &\quad + \vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} \times (\vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} \times \overrightarrow{AP}^{LG}) \tag{B.18}
 \end{aligned}$$

(**)▷

$$\vec{\omega}_{CT/C}^{CT} \times \vec{V}_{P, LG/CT} = \vec{\Omega}^{CT} \times (\vec{V}_{A/CT} + \vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} \times \overrightarrow{AP}^{LG}) \tag{B.19}$$

On remplace (B.18) et (B.19) dans (B.15)

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{P, LG/CT} \right)_C &= \vec{\Gamma}_{A/CT} + \dot{\vec{\omega}}_{LG/CT}^{LG} \times \overrightarrow{AP}^{LG} \\
 &\quad + \vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} \times (\vec{V}_{O/GR} + \vec{V}_{P/M} + \vec{\omega}_{M/GR}^M \times \overrightarrow{OP}^M + \vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} \times \overrightarrow{BP}^{GR}) \\
 &\quad + \vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} \times (\vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} \times \overrightarrow{AP}^{LG}) \\
 &\quad + \vec{\Omega}^{CT} \times (\vec{V}_{A/CT} + \vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} \times \overrightarrow{AP}^{LG}) \tag{B.20}
 \end{aligned}$$

• (6) ième terme

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{P,CT/IN} \right)_C &= \left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{P,CT/IN} \right)_{IN} + \underbrace{\vec{\omega}_{IN/C}^{IN}}_{=\vec{0}} \times \vec{V}_{P,CT/IN} \\
 &= \left(\frac{d}{dt} (\vec{\Omega}^{CT} \times \vec{EP}^{CT}) \right)_{IN} \\
 &= \underbrace{\dot{\vec{\Omega}}^{CT}}_{\simeq \vec{0}} \times \vec{EP}^{CT} + \vec{\Omega}^{CT} \times \underbrace{\left(\frac{d\vec{EP}^{CT}}{dt} \right)_{IN}}_{(*)}
 \end{aligned} \tag{B.21}$$

(*)▷

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d\vec{EP}^{CT}}{dt} \right)_{IN} &= \left(\frac{d\vec{EP}^{CT}}{dt} \right)_{CT} + \vec{\omega}_{CT/IN}^{CT} \times \vec{EP}^{CT} \\
 &= \left(\frac{d\vec{EA}^{CT}}{dt} \right)_{CT} + \left(\frac{d\vec{AP}^{CT}}{dt} \right)_{CT} + \vec{\Omega}^{CT} \times \vec{EP}^{CT} \\
 &= \vec{V}_{A/CT} + \underbrace{\left(\frac{d\vec{AP}^{LG}}{dt} \right)_{LG}}_{(**)} + \vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} \times \vec{AP}^{LG} + \vec{\Omega}^{CT} \times \vec{EP}^{CT}
 \end{aligned} \tag{B.22}$$

(**)▷

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d\vec{AP}^{LG}}{dt} \right)_{LG} &= \underbrace{\left(\frac{d\vec{AB}^{LG}}{dt} \right)_{LG}}_{=\vec{0}} + \left(\frac{d\vec{BP}^{LG}}{dt} \right)_{LG} \\
 &= \left(\frac{d\vec{BP}^{GR}}{dt} \right)_{GR} + \vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} \times \vec{BP}^{GR} \\
 &= \left(\frac{d\vec{BO}^{GR}}{dt} \right)_{GR} + \left(\frac{d\vec{OP}^{GR}}{dt} \right)_{GR} + \vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} \times \vec{BP}^{GR} \\
 &= \vec{V}_{O/GR} + \vec{V}_{O/GR} + \vec{V}_{P/M} + \vec{\omega}_{M/GR}^M \times \vec{OP}^M + \vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} \times \vec{BP}^{GR}
 \end{aligned} \tag{B.23}$$

On remplace (B.23) en (B.22) et le résultat en (B.21) :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{P,CT/IN} \right)_C &= \vec{\Omega}^{CT} \times \vec{V}_{A/CT} + 2\vec{\Omega}^{CT} \times \vec{V}_{O/GR} + \vec{\Omega}^{CT} \times \vec{V}_{P/M} \\
 &\quad + \vec{\Omega}^{CT} \times (\vec{\omega}_{M/GR}^M \times \vec{OP}^M) \\
 &\quad + \vec{\Omega}^{CT} \times (\vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} \times \vec{BP}^{GR}) + \vec{\Omega}^{CT} \times (\vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} \times \vec{AP}^{LG}) \\
 &\quad + \vec{\Omega}^{CT} \times (\vec{\Omega}^{CT} \times \vec{EP}^{CT})
 \end{aligned} \tag{B.24}$$

• (7) ième terme

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{P, \text{IN}/C} \right)_C &= \left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{P, E/C} \right)_C \\ &= \vec{\Gamma}_{E/C} \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Maintenant on substitue tous les terme développés en (B.1) :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_{P/C} &= \vec{\Gamma}_{P/M} + (\vec{\omega}_{M/GR}^M + \vec{\omega}_{GR/LG}^M + \vec{\omega}_{LG/CT}^M + \vec{\Omega}^M) \times \vec{V}_{P/M} \\ &+ \vec{\Gamma}_{O/GR} + \dot{\vec{\omega}}_{M/GR}^M \times \vec{OP}^M + \vec{\omega}_{M/GR}^M \times \vec{V}_{P/M} \\ &+ (\vec{\omega}_{M/GR}^M + \vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} + \vec{\omega}_{LG/CT}^{GR} + \vec{\Omega}^{GR}) \times (\vec{\omega}_{M/GR}^M \times \vec{OP}^M) \\ &+ (\vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} + \vec{\omega}_{LG/CT}^{GR} + \vec{\Omega}^{GR}) \times \vec{V}_{O/GR} \\ &+ \dot{\vec{\omega}}_{GR/LG}^{GR} \times \vec{BP}^{GR} + \vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} \times (\vec{V}_{O/GR} + \vec{V}_{P/M} + \vec{\omega}_{M/GR}^M \times \vec{OP}^M) \\ &+ (\vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} + \vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} + \vec{\Omega}^{LG}) \times (\vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} \times \vec{BP}^{GR}) \\ &+ \vec{\Gamma}_{A/CT} + \dot{\vec{\omega}}_{LG/CT}^{LG} \times \vec{AP}^{LG} \\ &+ \vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} \times (\vec{V}_{O/GR} + \vec{V}_{P/M} + \vec{\omega}_{M/GR}^M \times \vec{OP}^M + \vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} \times \vec{BP}^{GR}) \\ &+ \vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} \times (\vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} \times \vec{AP}^{LG}) \\ &+ \vec{\Omega}^{CT} \times (\vec{V}_{A/CT} + \vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} \times \vec{AP}^{LG}) \\ &+ \vec{\Omega}^{CT} \times \vec{V}_{A/CT} + 2\vec{\Omega}^{CT} \times \vec{V}_{O/GR} + \vec{\Omega}^{CT} \times \vec{V}_{P/M} + \vec{\Omega}^{CT} \times (\vec{\omega}_{M/GR}^M \times \vec{OP}^M) \\ &+ \vec{\Omega}^{CT} \times (\vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} \times \vec{BP}^{GR}) + \vec{\Omega}^{CT} \times (\vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} \times \vec{AP}^{LG}) \\ &+ \vec{\Omega}^{CT} \times (\vec{\Omega}^{CT} \times \vec{EP}^{CT}) \\ &+ \vec{\Gamma}_{E/C} \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Les termes \vec{AP}^{LG} et \vec{BP}^{GR} peuvent être décomposés sous la forme

$$\vec{AP}^{LG} = \vec{AB}^{LG} + \mathbf{C}_{GR}^{LG} \vec{BO}^{GR} + \mathbf{C}_{GR}^{LG} \mathbf{C}_M^{GR} \vec{OP}^M \quad (\text{B.27})$$

$$\vec{BP}^{GR} = \vec{BO}^{GR} + \mathbf{C}_M^{GR} \vec{OP}^M \quad (\text{B.28})$$

où par exemple \mathbf{C}_M^{GR} est la matrice de rotation du repère **M** par rapport au repère **GR**. On remplace (B.28) et (B.27) en (B.26). Un réarrangement de cette équation nous donne :

$$\begin{aligned}
\vec{\Gamma}_{P/C} &= \vec{\Gamma}_{E/C} \\
&+ \vec{\Omega}^{\text{CT}} \times (\vec{\Omega}^{\text{CT}} \times \vec{EP}^{\text{CT}}) \\
&+ \vec{\Gamma}_{A/\text{CT}} + 2\vec{\Omega}^{\text{CT}} \times \vec{V}_{A/\text{CT}} \\
&+ \vec{\Gamma}_1(\vec{AB}^{\text{LG}}) \\
&+ \vec{\Gamma}_2\left(\frac{d^2\vec{BO}^{\text{GR}}}{dt^2}, \frac{d\vec{BO}^{\text{GR}}}{dt}, \vec{BO}^{\text{GR}}\right) \\
&+ \vec{\Gamma}_3\left(\frac{d^2\vec{OP}^{\text{M}}}{dt^2}, \frac{d\vec{OP}^{\text{M}}}{dt}, \vec{OP}^{\text{M}}\right)
\end{aligned} \tag{B.29}$$

avec :

$$\vec{\Gamma}_1 = \dot{\vec{\omega}}_{\text{LG/CT}}^{\text{LG}} \times \vec{AB}^{\text{LG}} + \left(\vec{\omega}_{\text{LG/CT}}^{\text{LG}} + 2\vec{\Omega}^{\text{CT}}\right) \times \left(\vec{\omega}_{\text{LG/CT}}^{\text{LG}} \times \vec{AB}^{\text{LG}}\right) \tag{B.30}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\Gamma}_2 &= \vec{\Gamma}_{O/\text{GR}} \\
&+ \left[2\vec{\omega}_{\text{GR/LG}}^{\text{GR}} + \vec{\omega}_{\text{LG/CT}}^{\text{GR}} + \vec{\omega}_{\text{LG/CT}}^{\text{LG}} + \vec{\Omega}^{\text{GR}} + 2\vec{\Omega}^{\text{CT}}\right] \times \vec{V}_{O/\text{GR}} \\
&+ \dot{\vec{\omega}}_{\text{GR/LG}}^{\text{GR}} \times \vec{BO}^{\text{GR}} \\
&+ \left[\vec{\omega}_{\text{GR/LG}}^{\text{GR}} + 2\vec{\omega}_{\text{LG/CT}}^{\text{LG}} + \vec{\Omega}^{\text{LG}} + \vec{\Omega}^{\text{CT}}\right] \times \left(\vec{\omega}_{\text{GR/LG}}^{\text{GR}} \times \vec{BO}^{\text{GR}}\right) \\
&+ \dot{\vec{\omega}}_{\text{LG/CT}}^{\text{LG}} \times (\mathbf{C}_{\text{GR}}^{\text{LG}} \vec{BO}^{\text{GR}}) \\
&+ \left(\vec{\omega}_{\text{LG/CT}}^{\text{LG}} + 2\vec{\Omega}^{\text{CT}}\right) \times \left(\vec{\omega}_{\text{LG/CT}}^{\text{LG}} \times \mathbf{C}_{\text{GR}}^{\text{LG}} \vec{BO}^{\text{GR}}\right)
\end{aligned} \tag{B.31}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{\Gamma}_3 &= \vec{\Gamma}_{P/M} \\
 &+ \left[2\vec{\omega}_{M/GR}^M + \vec{\omega}_{GR/LG}^M + \vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} + \vec{\omega}_{LG/CT}^M + \vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} + \vec{\Omega}^M + \vec{\Omega}^{CT} \right] \times \vec{V}_{P/M} \\
 &+ \dot{\vec{\omega}}_{M/GR}^M \times \overrightarrow{OP}^M \\
 &+ \left[\vec{\omega}_{M/GR}^M + 2\vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} + \vec{\omega}_{LG/CT}^{GR} + \vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} + \vec{\Omega}^{GR} + \vec{\Omega}^{CT} \right] \times \left(\vec{\omega}_{M/GR}^M \times \overrightarrow{OP}^M \right) \\
 &+ \dot{\vec{\omega}}_{GR/LG}^{GR} \times \left(\mathbf{C}_M^{GR} \overrightarrow{OP}^M \right) \\
 &+ \left[\vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} + 2\vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} + \vec{\Omega}^{LG} + \vec{\Omega}^{CT} \right] \times \left(\vec{\omega}_{GR/LG}^{GR} \times \mathbf{C}_M^{GR} \overrightarrow{OP}^M \right) \\
 &+ \dot{\vec{\omega}}_{LG/CT}^{LG} \times \left(\mathbf{C}_{GR}^{LG} \mathbf{C}_M^{GR} \overrightarrow{OP}^M \right) \\
 &+ \left(\vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} + 2\vec{\Omega}^{CT} \right) \times \left(\vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} \times \mathbf{C}_{GR}^{LG} \mathbf{C}_M^{GR} \overrightarrow{OP}^M \right)
 \end{aligned} \tag{B.32}$$

EXPRESSIONS DE L'ACCÉLÉRATION VERTICALE ET L'ACCÉLÉRATION EÖTVÖS EXERCÉES SUR L'AVION

D'après l'Equation (3.20), se trouvent, parmi les accélération parasites, les termes $\vec{\Gamma}_{A/CT}$ et $2\vec{\Omega}^{CT} \times \vec{V}_{A/CT}$. Ces expressions sont exprimées dans le repère géocentrique CT. Mais nous avons besoin de ces accélérations dans le repère LG (où se trouve l'antenne GPS). Une transformation du repère CT au repère LG est alors nécessaire. D'après la Figure C.1, la transformation d'un vecteur \vec{r} du repère LG au repère CT se fait par :

$$\begin{aligned}
 \vec{r}^{CT} &= C_{LG}^{CT} \vec{r}^{LG} \\
 &= R_3(\pi - \lambda) R_2\left(\frac{1}{2}\pi - \varphi\right) \vec{r}^{LG} \\
 &= \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda & \sin \lambda & \cos \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi \sin \lambda & -\cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{pmatrix} \vec{r}^{LG}
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

avec les matrices de rotation données par

$$R_2(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & 0 & -\sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad R_3(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La transformation inverse se fait simplement par

$$\begin{aligned}
 \vec{r}^{LG} &= C_{CT}^{LG} \vec{r}^{CT} \\
 &= \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ \sin \lambda & -\cos \lambda & 0 \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{pmatrix} \vec{r}^{CT}
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

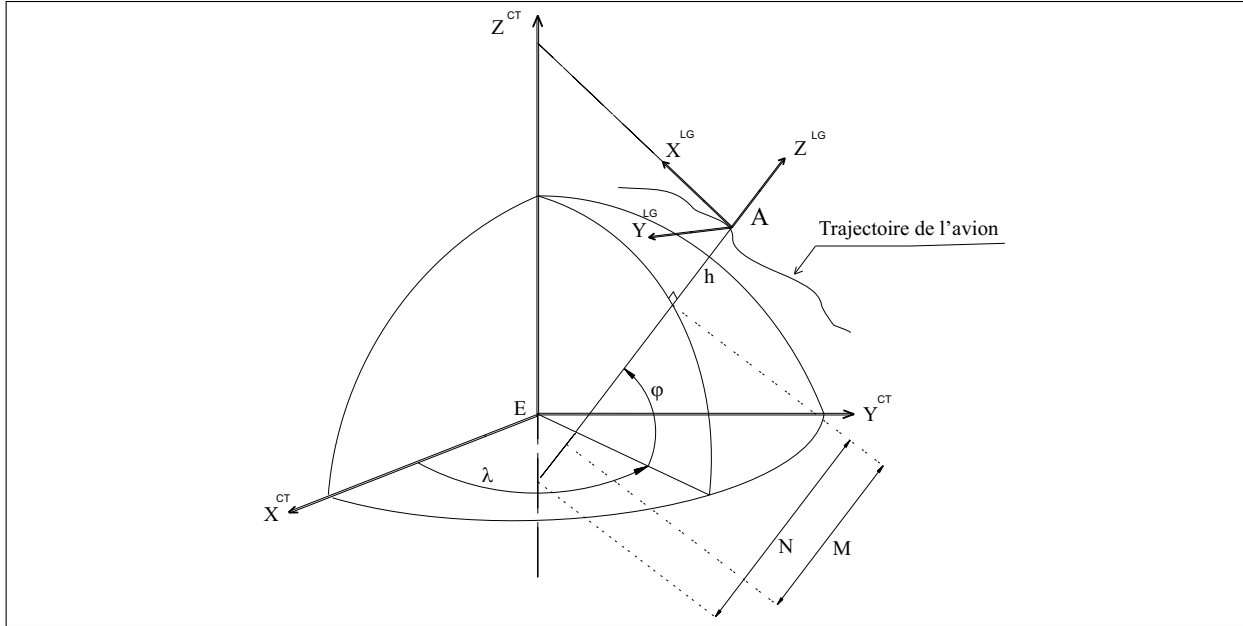


FIG. C.1 – Le repère local géodésique LG et le conventionnel terrestre CT sont liés à chaque instant par les coordonnées géodésiques ϕ, λ et h de l'antenne principale GPS.

car l'inverse d'une matrice de rotation est sa transposée :

$$C_{CT}^{LG} = (C_{LG}^{CT})^T$$

Le système GPS donne les coordonnées cartésiennes des points de mesure dans le référentiel géocentrique CT. Les coordonnées curvilignes correspondantes définies par l'ellipsoïde de référence géocentriques avec ces axes parallèles à ceux du repère CT sont (φ, λ, h) , qui se transforment en $(x, y, z)^{CT}$ par

$$\begin{aligned} \vec{r}^{CT} &= \begin{pmatrix} x^{CT} \\ y^{CT} \\ z^{CT} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ (N + h) \frac{b^2}{a^2} \sin \varphi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (C.3)$$

avec :

- (φ, λ, h) coordonnées curvilignes du centre de phase de l'antenne GPS,
- a demi-grand axe de l'ellipsoïde de référence,
- b demi-petit axe de l'ellipsoïde de référence,
- N rayon de courbure normal de l'ellipsoïde de référence.

Pour N nous avons l'expression suivante :

$$N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \quad (C.4)$$

- Commençons par le terme $2\vec{\Omega}^{\text{CT}} \times \vec{V}_{A/\text{CT}}$. Nous connaissons le vecteur $\vec{\Omega}^{\text{CT}}$:

$$\vec{\Omega}^{\text{CT}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_T \end{pmatrix} \quad (\text{C.5})$$

où Ω_T est la vitesse angulaire de la rotation terrestre. La vitesse du centre de phase de l'antenne GPS dans le repère CT est la dérivée de (C.3) par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{A/\text{CT}} &= \frac{d}{dt} \vec{r}_A^{\text{CT}} \\ &= \begin{pmatrix} -(N+h) \sin \varphi \cos \lambda \\ -(N+h) \sin \varphi \sin \lambda \\ (N \frac{b^2}{a^2} + h) \cos \varphi \end{pmatrix} \frac{d\varphi}{dt} + \begin{pmatrix} -(N+h) \cos \varphi \sin \lambda \\ (N+h) \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \frac{d\lambda}{dt} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \frac{dh}{dt} \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Ici nous avons considéré que les variations des rayons de courbure au voisinage du point de différentiation dans les différentes directions sont négligeables. Or, on peut considérer $N \equiv \text{cte}$. Le produit vectoriel de (C.5) et (C.6) nous donne les composantes de $2\vec{\Omega}^{\text{CT}} \times \vec{V}_{A/\text{CT}}$ dans le repère CT :

$$2\vec{\Omega}^{\text{CT}} \times \vec{V}_{A/\text{CT}} = 2\Omega_T \begin{pmatrix} (N+h) \sin \varphi \sin \lambda \frac{d\varphi}{dt} - (N+h) \cos \varphi \cos \lambda \frac{d\lambda}{dt} - \cos \varphi \sin \lambda \frac{dh}{dt} \\ -(N+h) \sin \varphi \cos \lambda \frac{d\varphi}{dt} - (N+h) \cos \varphi \sin \lambda \frac{d\lambda}{dt} + \cos \varphi \cos \lambda \frac{dh}{dt} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.7})$$

La dernière étape consiste à transformer ce vecteur par rapport au repère LG en utilisant (C.2) :

$$C_{\text{CT}}^{\text{LG}} \left(2\vec{\Omega}^{\text{CT}} \times \vec{V}_{A/\text{CT}} \right) = 2\Omega_T \begin{pmatrix} (N+h) \sin \varphi \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt} \\ (N+h) \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} - \cos \varphi \frac{dh}{dt} \\ -(N+h) \cos^2 \varphi \frac{d\lambda}{dt} \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

- Le terme $\vec{r}_{A/\text{CT}}$ transformé dans le repère LG est

$$\begin{aligned} C_{\text{CT}}^{\text{LG}} \vec{r}_{A/\text{CT}} &= C_{\text{CT}}^{\text{LG}} \left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{A/\text{CT}} \right)_{\text{CT}} \\ &= \left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{A/\text{LG}} \right)_{\text{CT}} \\ &= \left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{A/\text{LG}} \right)_{\text{LG}} + \vec{\omega}_{\text{LG}/\text{CT}}^{\text{LG}} \times \vec{V}_{A/\text{LG}} \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

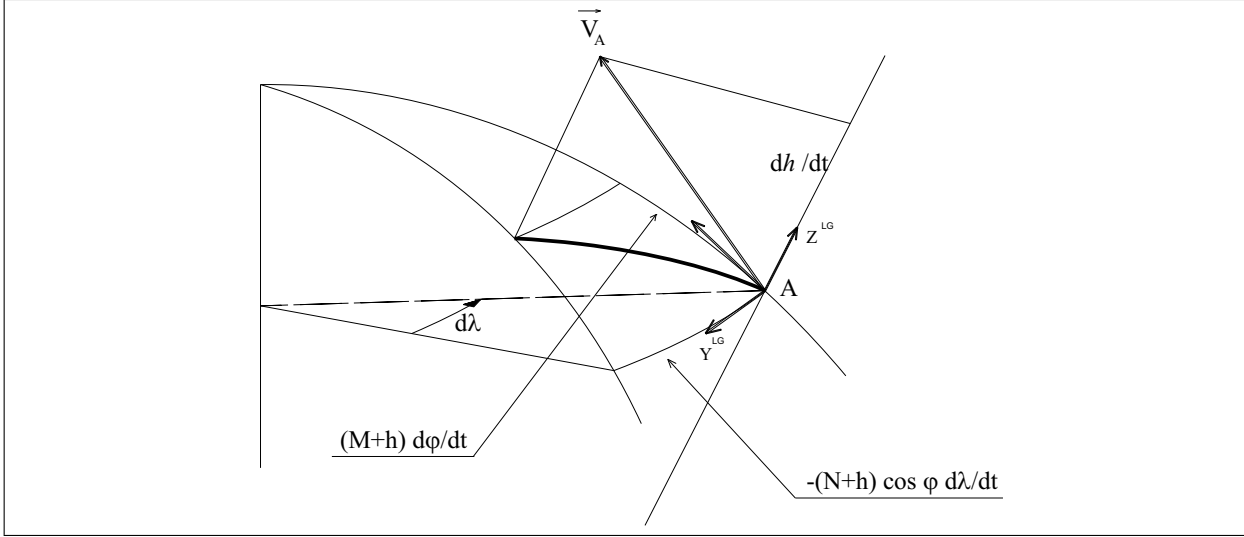


FIG. C.2 – Composantes du vecteur vitesse du point A dans le repère LG.

La notation $[\vec{\omega}_{\text{LG/CT}}^{\text{LG}} \times]$ peut être remplacée par une matrice anti-symétrique de la forme [Melachroinos (2004)]

$$\mathbf{A}_{\text{LG/CT}}^{\text{LG}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.10})$$

où ω_1 , ω_2 et ω_3 sont des composantes du vecteur $\vec{\omega}_{\text{LG/CT}}^{\text{LG}}$. L'Equation (C.9) dans cette notation devient

$$\mathbf{C}_{\text{CT}}^{\text{LG}} \vec{\Gamma}_{A/\text{CT}} = \left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{A/\text{LG}} \right)_{\text{LG}} + \mathbf{A}_{\text{LG/CT}}^{\text{LG}} \vec{V}_{A/\text{LG}} \quad (\text{C.11})$$

Le vecteur $\vec{V}_{A/\text{LG}}$ est donné selon la Figure C.2 par :

$$\vec{V}_{A/\text{LG}} = \begin{pmatrix} (M+h) \frac{d\varphi}{dt} \\ -(N+h) \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt} \\ dh/dt \end{pmatrix} \quad (\text{C.12})$$

où M est le rayon de courbure méridien de l'ellipsoïde de référence au point A et est calculé par

$$N = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \quad (\text{C.13})$$

La dérivée de (C.12) par rapport au temps est

$$\left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{A/LG} \right)_{LG} = \begin{pmatrix} (M+h) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{dh}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \\ (N+h) \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\lambda}{dt} - (N+h) \cos \varphi \frac{d^2 \lambda}{dt^2} - \cos \varphi \frac{dh}{dt} \frac{d\lambda}{dt} \\ d^2 h / dt^2 \end{pmatrix} \quad (C.14)$$

Il nous reste à calculer $\vec{\omega}_{LG/CT}^{LG}$ en (C.9) et également $\mathbf{A}_{LG/CT}^{LG}$ en (C.11). Cette matrice est la représentante des petites rotations du repère LG par rapport au repère CT. Elle est calculée par [Kwon (2000)]

$$\mathbf{A}_{LG/CT}^{LG} = \mathbf{C}_{CT}^{LG} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{C}_{LG}^{CT} \right) \quad (C.15)$$

En utilisant (C.1), la dérivée de \mathbf{C}_{LG}^{CT} par rapport au temps est

$$\frac{d}{dt} \mathbf{C}_{LG}^{CT} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi \cos \lambda \frac{d\varphi}{dt} + \sin \varphi \sin \lambda \frac{d\lambda}{dt} & \cos \lambda \frac{d\lambda}{dt} & -\sin \varphi \cos \lambda \frac{d\varphi}{dt} - \cos \varphi \sin \lambda \frac{d\lambda}{dt} \\ -\cos \varphi \sin \lambda \frac{d\varphi}{dt} - \sin \varphi \cos \lambda \frac{d\lambda}{dt} & \sin \lambda \frac{d\lambda}{dt} & -\sin \varphi \sin \lambda \frac{d\varphi}{dt} + \cos \varphi \cos \lambda \frac{d\lambda}{dt} \\ -\sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} & 0 & \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \end{pmatrix} \quad (C.16)$$

La multiplication de (C.16) par \mathbf{C}_{CT}^{LG} donnée par (C.2), nous donne alors $\mathbf{A}_{LG/CT}^{LG}$:

$$\mathbf{A}_{LG/CT}^{LG} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \varphi \frac{d\lambda}{dt} & \frac{d\varphi}{dt} \\ \sin \varphi \frac{d\lambda}{dt} & 0 & -\cos \varphi \frac{d\lambda}{dt} \\ -\frac{d\varphi}{dt} & \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt} & 0 \end{pmatrix} \quad (C.17)$$

Par comparaison entre (C.17) et (C.10), on obtient :

$$\vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt} \\ d\varphi/dt \\ \sin \varphi \frac{d\lambda}{dt} \end{pmatrix} \quad (C.18)$$

On multiplie $\vec{V}_{A/LG}$ par $\mathbf{A}_{LG/CT}^{LG}$ (ce qui est équivalent au produit vectoriel $\vec{\omega}_{LG/CT}^{LG} \times \vec{V}_{A/LG}$) et on obtient :

$$\mathbf{A}_{LG/CT}^{LG} \vec{V}_{A/LG} = \begin{pmatrix} (N+h) \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 + \frac{d\varphi}{dt} \frac{dh}{dt} \\ (M+h) \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\lambda}{dt} - \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt} \frac{dh}{dt} \\ -(M+h) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - (N+h) \cos^2 \varphi \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 \end{pmatrix} \quad (C.19)$$

Après tout ces développements, en utilisant (C.8), (C.14) et (C.19), nous pouvons écrire l'expression vectorielle finale de l'accélération parasite $\vec{\Gamma}_{A/CT} + 2\vec{\Omega}^{CT} \times \vec{V}_{A/CT}$ comme

$$\left(\vec{\Gamma}_{A/CT} + 2\vec{\Omega}^{CT} \times \vec{V}_{A/CT} \right)_{LG} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad (C.20)$$

avec :

$$\begin{aligned} a_x &= 2\Omega_T(N+h) \sin \varphi \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt} + (M+h) \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{dh}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \\ &\quad + (N+h) \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 + \frac{d\varphi}{dt} \frac{dh}{dt} \end{aligned} \quad (C.21)$$

$$\begin{aligned} a_y &= 2\Omega_T \left((N+h) \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} - \cos \varphi \frac{dh}{dt} \right) \\ &\quad + (N+h) \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\lambda}{dt} - (N+h) \cos \varphi \frac{d^2\lambda}{dt^2} - \cos \varphi \frac{dh}{dt} \frac{d\lambda}{dt} \\ &\quad + (M+h) \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\lambda}{dt} - \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt} \frac{dh}{dt} \end{aligned} \quad (C.22)$$

$$\begin{aligned} a_z &= d^2h/dt^2 - 2\Omega_T(N+h) \cos^2 \varphi \frac{d\lambda}{dt} \\ &\quad - (M+h) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - (N+h) \cos^2 \varphi \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 \end{aligned} \quad (C.23)$$

Comme la gravimétrie aéroportée scalaire détermine la composante verticale du vecteur de gravité, nous nous intéressons seulement à la composante verticale a_z . Cette composante est souvent exprimée sous la forme de la somme de deux accélérations nommées *accélération verticale* donnée par

$$a_v = \frac{d^2h}{dt^2} \quad (C.24)$$

et *accélération Eötvös* définie par

$$a_{E\ddot{o}t} = -2\Omega_T(N+h) \cos^2 \varphi \frac{d\lambda}{dt} - (M+h) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - (N+h) \cos^2 \varphi \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 \quad (C.25)$$

LE MÉTHODE D'HELMERT POUR L'ESTIMATION DES FACTEURS DE VARIANCE

Cette page se réfère à Sillard (2001). Soit le problème de moindres carrés

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \doteq \mathbf{Y} \tag{D.1}$$

avec :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{pmatrix}$$

La matrice de variance-covariance du vecteur des observations $\mathbf{C}_\mathbf{Y}$ est diagonale par blocs :

$$\mathbf{C}_\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \sigma_{0,\mathbf{y}_1}^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{y}_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{0,\mathbf{y}_n}^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{y}_n} \end{pmatrix} \tag{D.2}$$

Les facteurs de $\sigma_{0,\mathbf{y}_i}^2$ sont inconnus et les matrices $\mathbf{Q}_{\mathbf{y}_i}$ sont connues a priori. Le système normal s'écrit :

$$\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i^T \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{A}_i \right) \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i^T \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{y}_i \tag{D.3}$$

On note

$$\begin{cases} \mathbf{W} = \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i^T \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{A}_i \right)^{-1} \\ \mathbf{N}_i = \mathbf{A}_i^T \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{A}_i \end{cases}$$

Soit Σ un vecteur qui contient des facteurs de variance :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{0,\mathbf{y}_1}^2 \\ \vdots \\ \sigma_{0,\mathbf{y}_n}^2 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\hat{\Sigma}$ défini par

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{0,\mathbf{y}_1}^2 \\ \vdots \\ \hat{\sigma}_{0,\mathbf{y}_n}^2 \end{pmatrix}$$

est un estimateur sans biais du vecteur Σ , et est donné par

$$\begin{cases} \hat{\Sigma} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{q} \\ \mathbf{H}(i, j) = \delta_i^j [n_i - 2tr(\mathbf{W}\mathbf{N}_i)] + tr(\mathbf{W}\mathbf{N}_i\mathbf{W}\mathbf{N}_j) \\ \mathbf{q}_i = \mathbf{V}_i^T \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{V}_i \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

avec :

- δ_i^j symbole de Kronecker ,
- n_i longueur du vecteur \mathbf{y}_i ,
- $tr(.)$ trace de matrice (somme des éléments diagonaux de la matrice).

Le vecteur \mathbf{V}_i est la i^e partie du vecteur des résidus donné par

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{V}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{Y} \\ &= \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{V}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{V}}_n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Cette méthode a été proposée pour la première fois par Friedrich Robert Helmert (1843-1917), professeur de Géodésie à l'université de Aachen. L'avantage de cette méthode est qu'elle directement applicable à tout les problèmes d'estimation de facteurs de variance à condition que la matrice \mathbf{H} soit inversible. Son inconvénient est le volume des calculs matriciels nécessaires. A chaque instant il faut garder dans le mémoire de l'ordinateur la totalité de la matrice normale, ce qui n'est pas pratique pour les problèmes à grand nombre d'inconnues.

LA DIFFÉRENTIATION DE SÉRIES CHRONOLOGIQUES ET L'ESTIMATION DES MATRICES DE COVARIANCE ASSOCIÉES

La différentiation est un problème mal posé. La transformé de Fourier de la dérivée d'une fonction $f(t)$ est

$$F\left[\frac{f(t)}{dt}\right] = i\omega F(\omega) \quad (\text{E.1})$$

où $F(\omega)$ est la transformé de Fourier de $f(t)$ et i est l'unité sur l'axe imaginaire. Cette équation implique qu'une petite perturbation de $f(t)$ peut provoquer de grandes variations de sa dérivée, surtout dans les hautes fréquences.

• Dérivée première

Une estimation de $f'(t)$ en un point t_i d'une série chronologique est donnée par

$$f'(t_i) = \frac{f(t_i + \delta t) - f(t_i - \delta t)}{2\delta t} + e_{tronc}(f, \delta t), \quad t_i \in [t_a, t_b], \quad t_a, t_b \in \mathbb{R} \quad (\text{E.2})$$

Cette équation est obtenue à priori d'un développement en série de Taylor. Due à la troncature de la série de Taylor, nous avons l'introduction d'un biais e_{tronc} donné par

$$e_{tronc}(f, \delta t) = -\frac{\delta t^2}{6} f'''(c) = (\delta t^2), \quad c \in [t_i - \delta t, t_i + \delta t] \quad (\text{E.3})$$

et

$$e_{tronc}(f, \delta t) \leq \frac{\delta t^2}{6} M, \quad M = \max |f'''(c)|$$

où f''' est la troisième dérivée de f . On note que cette dérivée est la variation de la courbure de f . Une grande valeur de f''' signifie que la fonction est à "haute fréquence" au point t_i . Autrement dit, l'estimateur (E.2) n'est pas efficace pour une fonction avec contenu fréquentiel "haute fréquence".

Nous voulons également avoir une idée sur le *bruit* propagé sur la dérivée par la différentiation numérique. Ce bruit est formulé par la matrice de covariance. Nous considérons que la distance d'échantillonnage sur l'ensemble de la série est constante. On peut alors écrire l'Equation (E.2) sous la forme

$$f'(t_i) = \frac{1}{2\delta t} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{i-1} \\ f_i \\ f_{i+1} \end{pmatrix} + e_{tronc}(f, \delta t) \quad (\text{E.4})$$

où $f_i = f(t_i)$. Sur la totalité des points de la série, (E.4) devient

$$\mathbf{F}' \doteq \mathbf{D}\mathbf{F} \quad (\text{E.5})$$

avec :

$$\mathbf{F}' = \begin{pmatrix} f'_2 \\ f'_3 \\ \vdots \\ f'_{n-1} \end{pmatrix}_{(n-2) \times 1} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

et

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2\delta t} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ & & & & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(n-2) \times n} \quad (\text{E.6})$$

On applique la loi de la propagation de variance à (E.5) :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{F}'} = \mathbf{D}\mathbf{C}_{\mathbf{F}}\mathbf{D}^T \quad (\text{E.7})$$

avec :

- n nombre des points sur l'ensemble de la série temporelle,
- $\mathbf{C}_{\mathbf{F}}$ matrice de covariance $n \times n$ de $f(t)$,
- $\mathbf{C}_{\mathbf{F}'}$ matrice de covariance $(n-2) \times (n-2)$ de la dérivée de $f(t)$.

Le problème essentiel est de construire la matrice de covariance (initiale) de \mathbf{F} . Cette matrice représente la nature physique des données, et doit être estimée à partir de nos connaissances sur les instruments de mesure et les conditions d'acquisition. Si ces informations ne sont pas disponibles, on doit trouver la matrice de covariance à partir des modèles statistiques sous certaines hypothèses. Par exemple, on considère dans la mesure du possible, que la série temporelle est stationnaire.

Il est évident que pour les f_i indépendantes, \mathbf{C}_F est diagonale. Sinon, selon la nature de $f(t)$, un modèle d'autocorrélation doit être choisi pour construire ensuite \mathbf{C}_F . Par exemple on considère un processus linéaire auto-régressif d'ordre 1 (processus de Markov) qui est défini par (Figure E.1)

$$f_i = \rho f_{i-1} + \varepsilon_i, \quad i \in \mathbb{N} \quad (\text{E.8})$$

avec ε_i bruit blanc :

$$\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0, \quad \mathbb{E}(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$$

La fonction d'autocorrélation de f est [Bosq et Lecoutre (1992)]

$$R_f(t_i, t_{i-k}) = \rho^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{E.9})$$

La matrice de covariance à partir de ce modèle est simplement

$$\mathbf{C}_F = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

On applique la loi de la propagation de variance (E.7) et on obtient la variance de la dérivée en un point de la série :

$$\sigma_{f'}^2 = \frac{\sigma^2}{2\delta t^2} (1 - \rho^2) \quad (\text{E.10})$$

On compare (E.3) et (E.10) pour étudier le rôle de δt : la variance de la dérivée augmente quand δt devient petit, tandis que le biais diminue (Figure E.2). L'erreur quadratique moyenne est la somme du bruit et le biais. Cette erreur est minimum pour des δt qui ne sont pas forcément proches de zéro. Ce résultat est appelé le *dilemme du pas d'échantillonnage*¹ [Mathews et Fink (2004)] et [Isaacson et Keller (1994)]. Pour différencier une série chronologique de façon optimale, il faut d'abord connaître son modèle stochastique sous-jacent pour avoir sa fonction d'autocorrélation. Ensuite une analyse, comme celle représentée Figure E.2, nous permet de déduire le pas d'échantillonnage optimal.

Nous pouvons trouver la fonction d'autocorrélation d'une façon empirique à partir de sa définition :

$$R_f(t_i, t_j) = \mathbb{E}[f(t_i)f(t_j)] \quad (\text{E.11})$$

Pour une série stationnaire de moyenne nulle, la corrélation entre deux points ne dépend que de leur distance respective :

$$R_f(\tau) = \mathbb{E}[f(t_i)f(t_i + \tau)] \quad (\text{E.12})$$

¹step-size dilemma

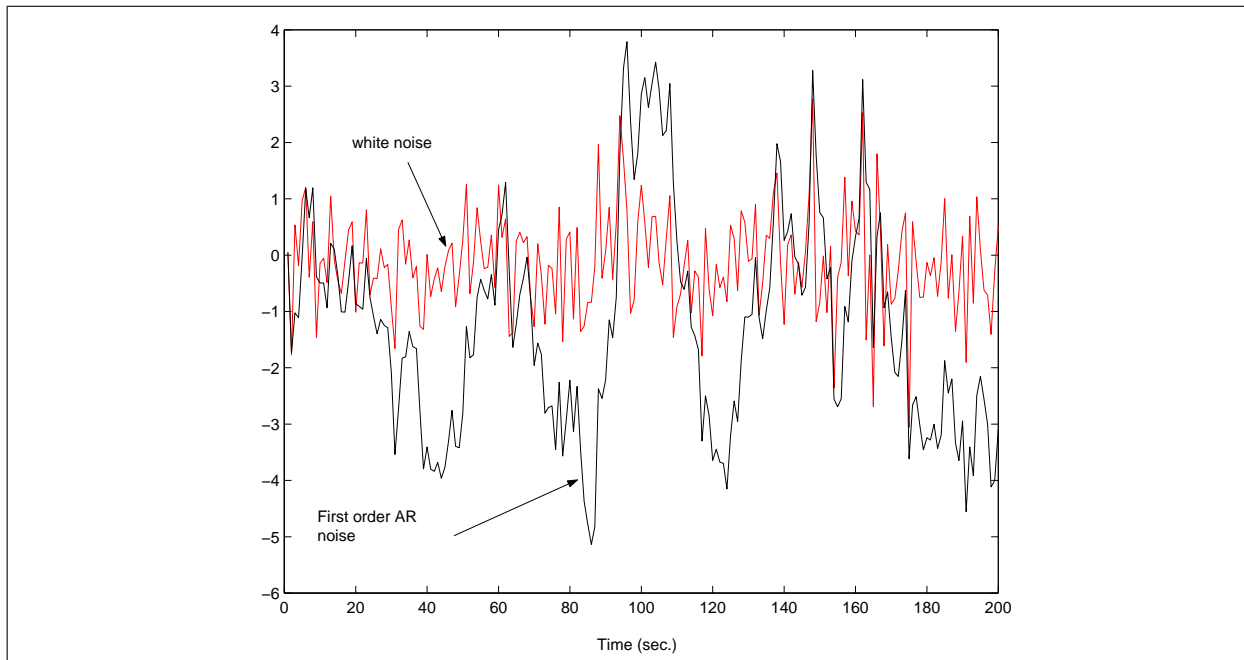


FIG. E.1 – Bruit blanc et bruit corrélé de type auto-régressif AR1

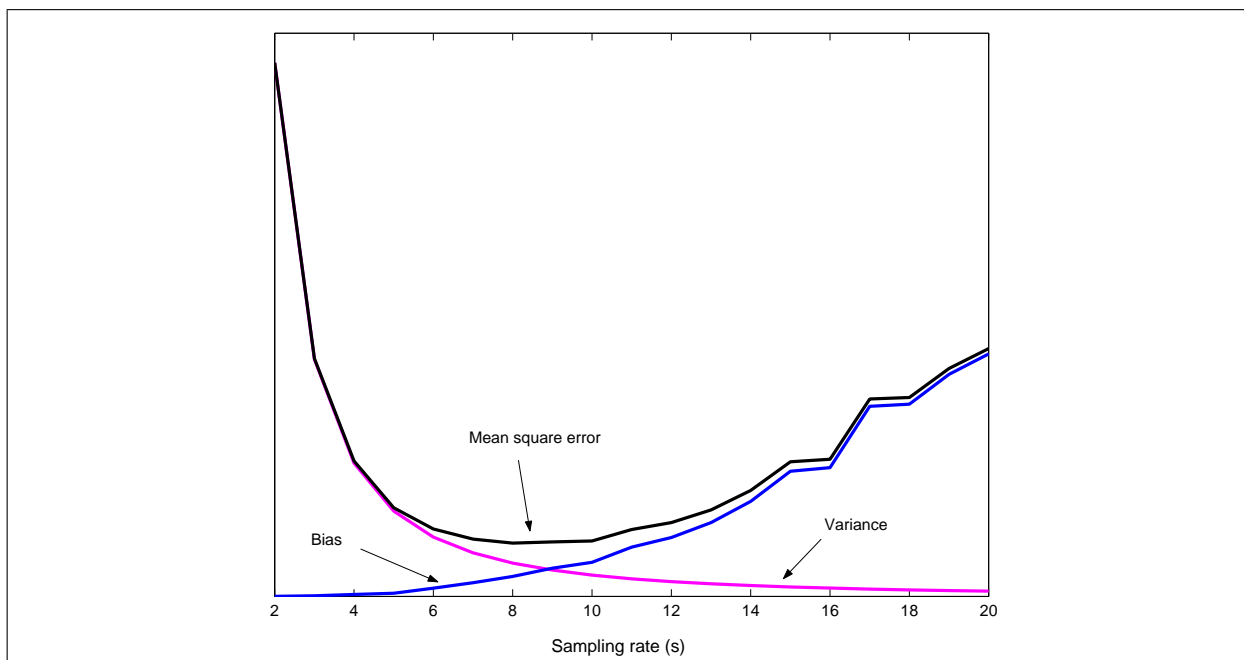


FIG. E.2 – Variance et biais sur la série différenciée. L'erreur quadratique moyenne (somme de la variance et du biais) est minimum pour des δt qui ne sont pas forcément proches de zéro.

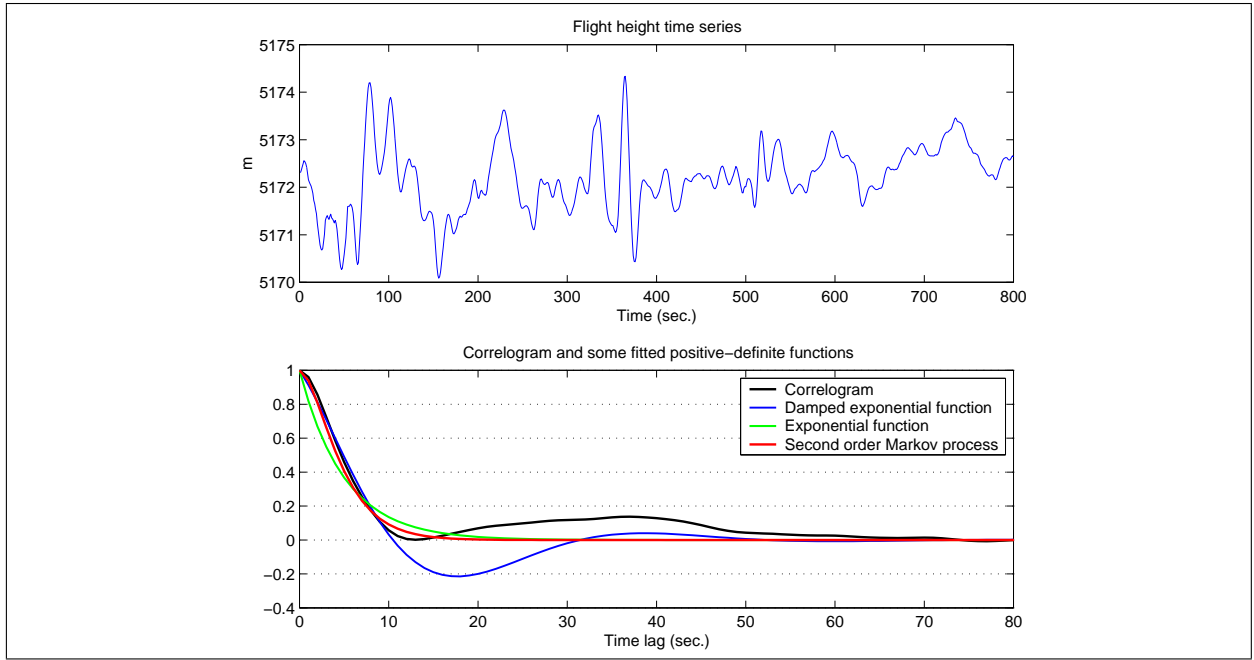


FIG. E.3 – Exemple d’une série chronologique et le corrélogramme correspondant calculé par (E.13). Les fonctions positives-définies ont été ajustées par moindres carrés pour trouver la fonction d’autocorrélation.

En pratique on peut utiliser la relation suivante [Chatfield (1995), p. 20] :

$$R_f(k) \doteq \frac{1}{n-k} \sum_{i=0}^{n-k} f_i f_{i+k}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (\text{E.13})$$

La représentation de R_f en fonction de k est appelé *corrélogramme* et est utilisé pour trouver la fonction d’autocorrélation de f . Cette fonction doit être positive-définie (Figure E.2). Par exemple un polynôme ne peut pas être ajusté au corrélogramme.

Nous pouvons également trouver la fonction d’autocorrélation à partir du spectre $S_f(\omega)$ de la série temporelle, car le spectre de puissance¹ et l’autocorrélation d’une fonction constituent une paire de Fourier [cf. Papoulis (1965), p. 338] :

$$S_f(\omega) = \text{FT}[R_f(\tau)] \iff R_f(\tau) = \text{IFT}[S_f(\omega)] \quad (\text{E.14})$$

• Dérivée seconde

Les équations (E.2) à (E.7) correspondent à la dérivée première d’une série temporelle. Le principe de calcul de la dérivée seconde est identique à celui de la dérivée première. La relation

$$f''(t_i) \doteq \frac{f(t_i + \delta t) - 2f(t_i) + f(t_i - \delta t)}{\delta t^2}, \quad t_i \in [t_a, t_b], \quad t_a, t_b \in \mathbb{R} \quad (\text{E.15})$$

¹power spectrum

nous donne un biais de troncature de

$$e_{trunc}(f, \delta t) = -\frac{\delta t^2}{12} f^{(4)}(c) = O(\delta t^2), \quad c \in [t_i - \delta t, t_i + \delta t] \quad (\text{E.16})$$

et

$$e_{trunc}(f, \delta t) \leq \frac{\delta t^2}{12} M, \quad M = \max |f^{(4)}(c)|$$

où $f^{(4)}$ est la dérivée quatrième de $f(t)$. Nous pouvons également évaluer la matrice de covariance correspondante par une méthode similaire à (E.7). Ditmar et van Eck van der Sluijs (2004) appliquent cette technique pour calculer l'accélération des satellites dans un problème de modélisation du champ de gravité.

L'une des méthodes proposées pour résoudre le problème mal posé de la différentiation, est de transformer l'équation différentielle correspondante en une équation intégrale (comparez avec l'Equation (4.22)) :

$$\begin{aligned} G(t) &= \frac{d^2 f}{dt^2} && \Longleftrightarrow \\ \int_{t_a}^{t_b} G(\zeta) W(t, \zeta) d\zeta &= \ell(t) \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

avec :

$$\ell(t) = f(t) - f(t_a) - \frac{t - t_a}{t_b - t_a} (f(t_b) - f(t_a)) \quad (\text{E.18})$$

$$W(t, \zeta) = \begin{cases} -\frac{t - t_a}{t_b - t_a} (t_b - \zeta) + t - \zeta & t_a \leq \zeta \leq t \\ -\frac{t - t_a}{t_b - t_a} (t_b - \zeta) & t < \zeta \leq t_b \end{cases} \quad (\text{E.19})$$

Pour la série temporelle $f(t_k)$, $t_k = t_a + (k - 1)\delta t$, $k = 1, 2, \dots, n$ avec n nombre des points, on considère que le pas d'échantillonnage δt est constant. Ainsi, après la discrétisation, (E.17) est écrite sous la forme :

$$\mathbf{AG} = \mathbf{L} + \mathbf{r} \quad (\text{E.20})$$

avec :

- \mathbf{A} matrice $(n - 2) \times (n - 2)$ des coefficients, identique à celle de (4.37),
- \mathbf{G} vecteur $(n - 2) \times 1$ des inconnues $[G(t_2), G(t_3), \dots, G(t_{n-1})]^T$,
- \mathbf{L} vecteur $(n - 2) \times 1$ avec son $i^{\text{ème}}$ élément égal à $\ell(t_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, n - 2$,
- \mathbf{r} vecteur des erreurs associées.

La solution de systèmes similaires a été expliquée dans la Section 4.3.2. La dérivée seconde de $f(t)$ est alors calculée par

$$\hat{\mathbf{G}} = (\hat{\sigma}_{0,\mathbf{L}}^{-2} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{L}}^{-1} \mathbf{A} + \hat{\sigma}_{0,\mathbf{G}}^{-2} \mathbf{Q}_{\mathbf{G}}^{-1})^{-1} \hat{\sigma}_{0,\mathbf{L}}^{-2} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{L}}^{-1} \mathbf{L} \quad (\text{E.21})$$

et la matrice de covariance correspondante par

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{G}}} = (\hat{\sigma}_{0,\mathbf{L}}^{-2} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{L}}^{-1} \mathbf{A} + \hat{\sigma}_{0,\mathbf{G}}^{-2} \mathbf{Q}_{\mathbf{G}}^{-1})^{-1} \quad (\text{E.22})$$

avec :

\mathbf{Q}_L	matrice cofacteur du vecteur \mathbf{L} ,
\mathbf{Q}_G	matrice cofacteur a priori du vecteur inconnu \mathbf{G} ,
$\sigma_{0,G}^2$ et $\sigma_{0,L}^2$	facteurs de variance inconnus.

Le calcul des facteurs de variances, est un problème classique dans la théorie de moindres carrés. Deux méthodes (degré de liberté et Helmert) couramment utilisées, ont déjà été expliquées dans la Section 4.3.2 et l'Annexe D. Pour les autres méthodes voir par exemple Yu (1996) et Crocetto et al. (2000). Nous pouvons considérer la solution (E.21) comme une méthode de régularisation. Le problème est de trouver le coefficient de régularisation pour lequel il existe plusieurs méthodes, dont la méthode de la courbe 'L' expliquée dans la Section 4.3.2. On note qu'avec la méthode de régularisation on ne trouve stricto sensu que l'accélération le long de la série. La matrice de covariance ne peut être obtenue que par la relation (E.22).

La matrice de cofacteur \mathbf{Q}_L est obtenue en appliquant la loi de la propagation de variance à (E.18). A cette étape, la fonction d'autocorrélation de f apparaît. Pour la matrice de covariance a priori des inconnus \mathbf{Q}_G , nous pouvons utiliser la fonction d'autocorrélation obtenue par la solution non-régularisée de (E.20).

On ajoute que la solution non-régularisée obtenue par cette méthode est identique à celle calculée par (E.15). Le rôle des facteurs de variances (ou également le coefficient de régularisation) est de contrôler le degré de lissage de la solution au sens des moindres carrés.

• Exemple numérique

Calculons la dérivée seconde de la série temporelle de la Figure E.3. Cette série est constituée des altitudes de vol d'un avion (en mètres) le long d'une trajectoire en fonction du temps. L'écart type des altitudes est pris égal à 10 *cm*. Une fonction d'autocorrélation de type Markov d'ordre 2 a été choisie (elle est présentée sur la même figure). La définition de cette fonction est

$$R_f(\tau) = (1 + 2\alpha|\tau|)e^{-2\alpha|\tau|} \quad (\text{E.23})$$

Le paramètre α est obtenu par ajustement de R_f au corrélogramme. La matrice de cofacteur correspondante à cette fonction est montrée Figure E.4.

On a calculé la dérivée seconde non-régularisée par (E.15), et on a obtenu sa fonction d'autocorrélation a priori par la méthode de corrélogramme. Elle aussi est une fonction d'autocorrélation de type Markov d'ordre 2. Après avoir construit les matrices de cofacteur nécessaires, on a lancé le processus d'estimation au sens des moindres carrés (E.21). Les deux solutions obtenues par la méthode d'Helmert et la méthode de la courbe 'L' sont illustrées sur la figure E.5. Le paramètre de régularisation avec la méthode de la courbe 'L' est de 0.49 et avec la méthode d'Helmert de 0.20. Le maximum de différence entre les deux résultats est de 0.0135 *m/sec*². La matrice de covariance estimée des dérivées est montrée sur la Figure E.6. Un effet de bordure apparaît au début et à la fin de la série différenciée. Au milieu de la série, l'écart type des dérivées est d'environ 30 *mGal* soit 0.0003 *m/sec*².

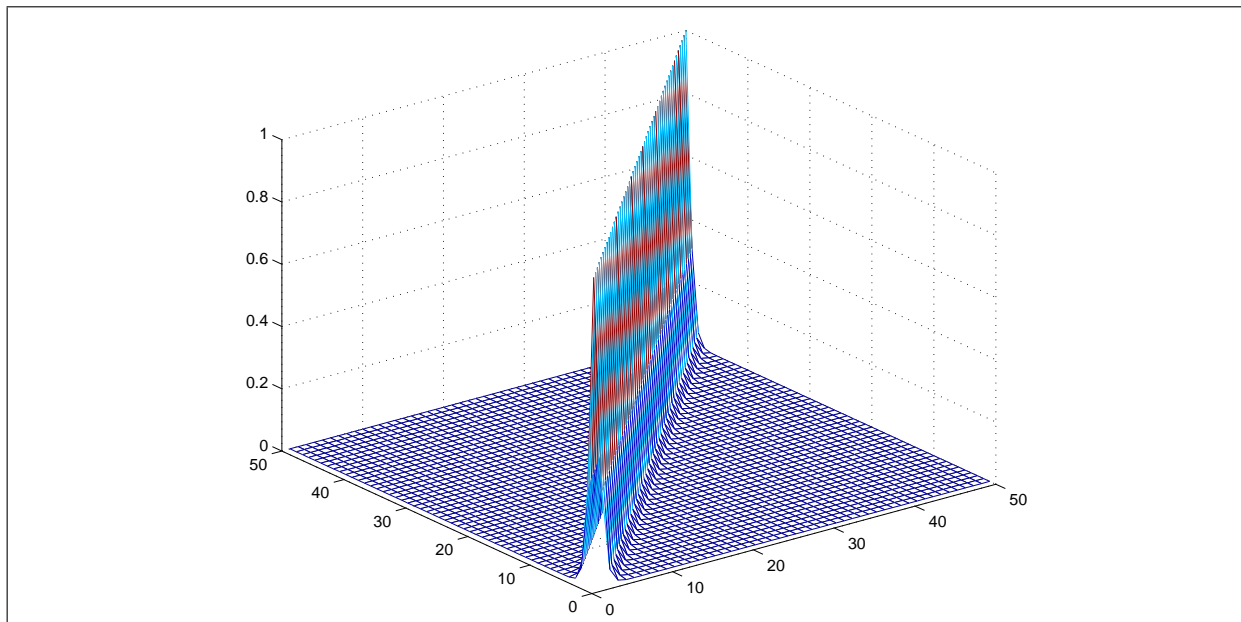


FIG. E.4 – Matrice de cofacteur obtenue par une fonction d'autocorrélation de type Markov d'ordre 2.

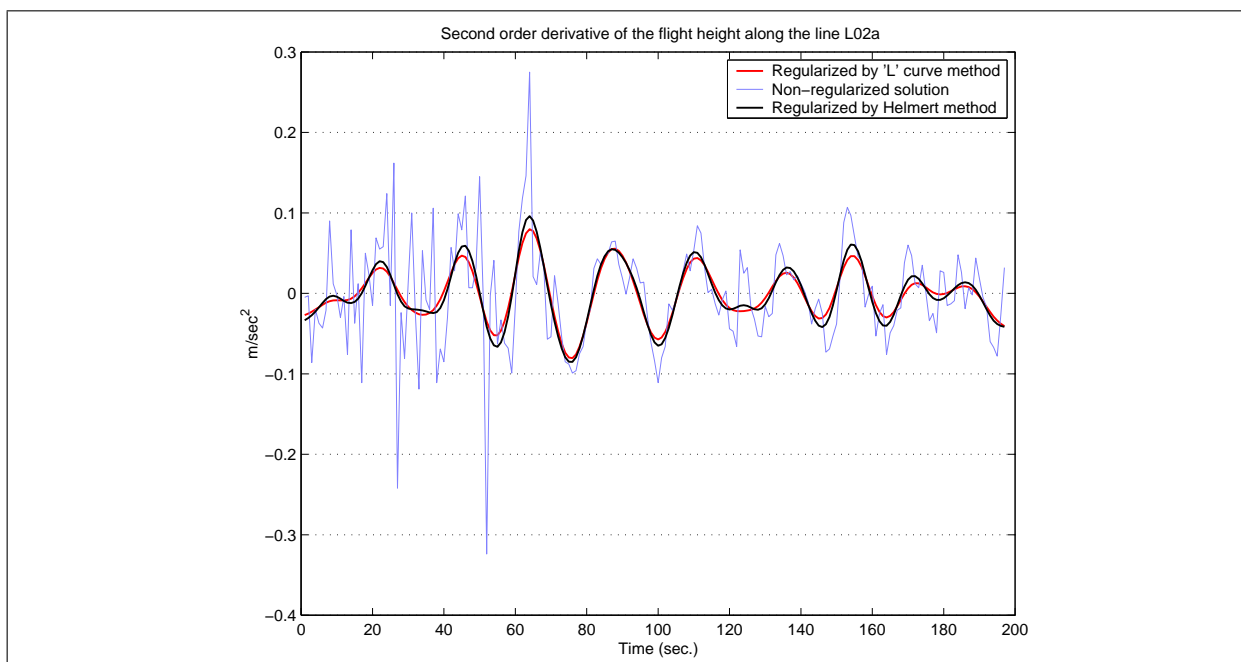


FIG. E.5 – Dérivée seconde calculée par différentes méthodes.

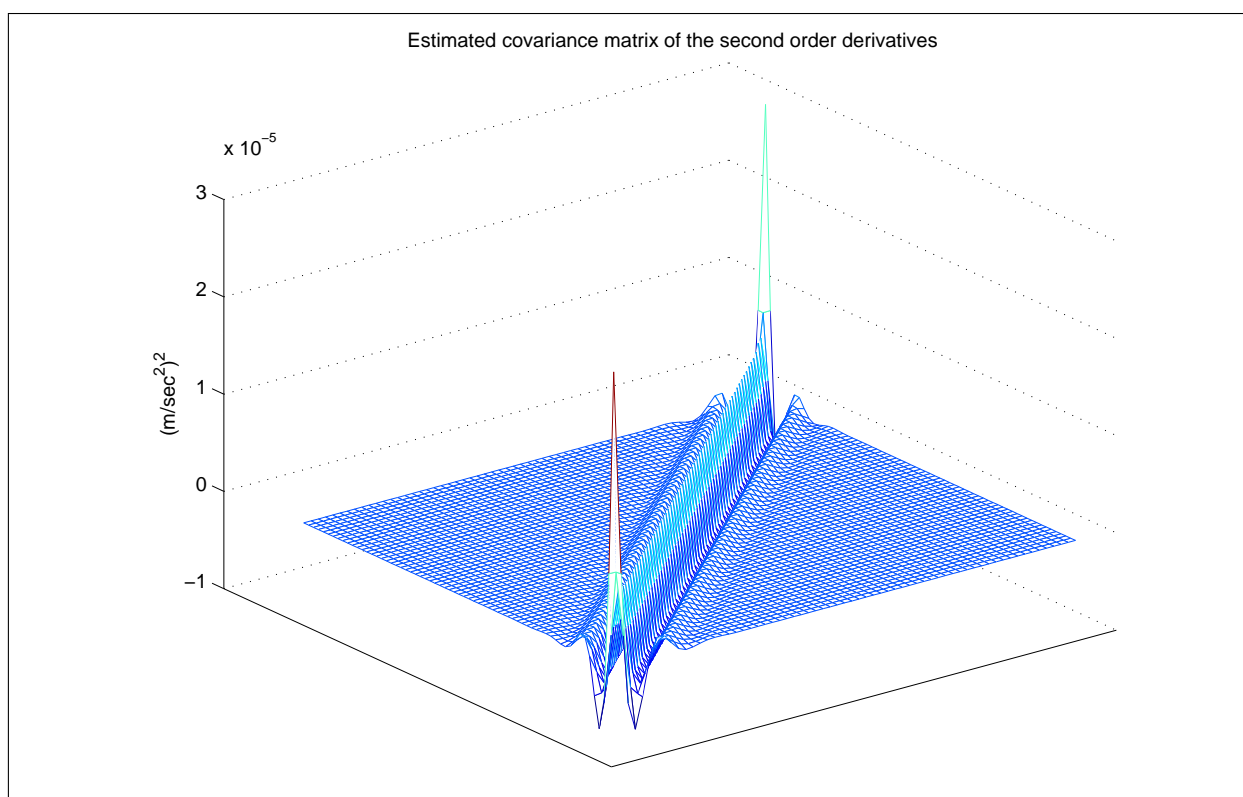


FIG. E.6 – Matrice de covariance estimée des dérivées secondes. On remarque les effets de "bord".

EQUATIONS DES CONTRAINTES AUX POINTS DE CROISEMENTS

La Figure (F.1) montre la géométrie d'un point de croisement C entre deux lignes de vol A et B. Δh est la différence des altitudes de vol au point C . Pour les perturbations de gravité aux points de croisement, on peut écrire le modèle mathématique suivant :

$$\delta g^A(C) \doteq \delta g^B(C) + \frac{\partial \delta g}{\partial h} \Delta h \quad (\text{F.1})$$

avec :

$\delta g^A(C)$	perturbation de gravité au point C sur la ligne A
$\delta g^B(C)$	perturbation de gravité au point C sur la ligne B
$\partial \delta g / \partial h$	gradient vertical de la perturbation de gravité qu'on peut obtenir à partir des modèles géopotentiels

On peut obtenir l'équation de contrainte par deux approches : l'interpolation linéaire et l'interpolation quadratique.

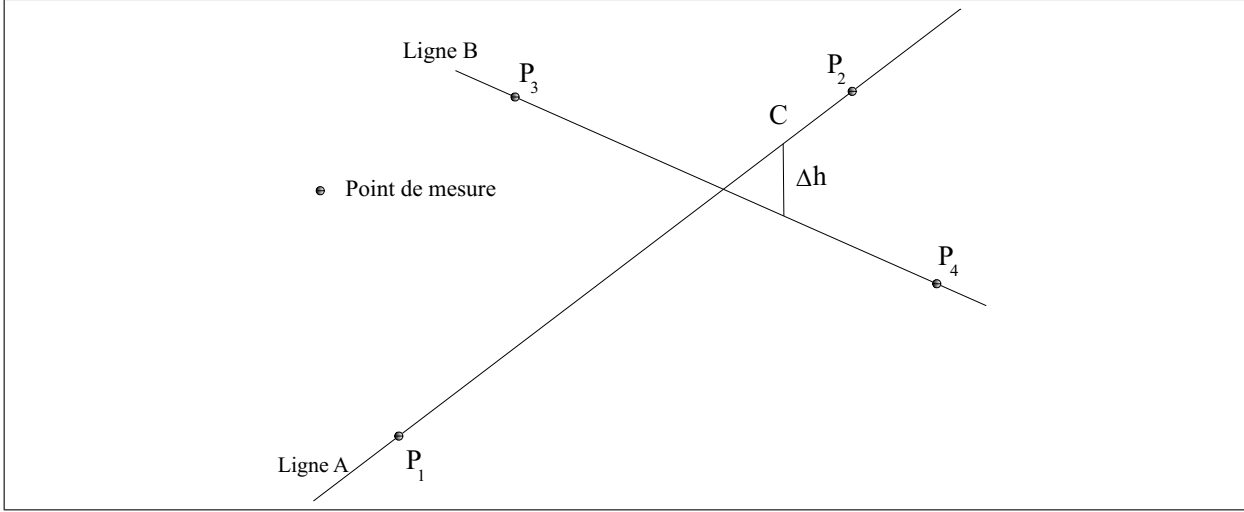
F.1 Methode A : Interpolation linéaire

Avec l'interpolation linéaire nous avons

$$\delta g^A(C) \doteq \delta g(P_1) + \frac{\delta g(P_2) - \delta g(P_1)}{x_{P_2} - x_{P_1}} (x_C - x_{P_1}) \quad (\text{F.2})$$

$$\delta g^B(C) \doteq \delta g(P_3) + \frac{\delta g(P_4) - \delta g(P_3)}{x_{P_4} - x_{P_3}} (x_C - x_{P_3}) \quad (\text{F.3})$$

ici par exemple x_{P_1} est la distance entre le point P_1 et un certain point fixe sur la ligne de vol A, pas "très loin" de P_1 . Pour plus de facilité, on note $d_{ij} = |x_j - x_i|$ la distance entre

FIG. F.1 – Géométrie du point de croisement C entre deux lignes de vol A et B.

les points i et j . On remplace (F.2) et (F.3) dans (F.1), puis on réarrange les termes :

$$\underbrace{\left(1 - \frac{d_{1C}}{d_{12}}\right)}_{d_{2C}/d_{12}} \delta g(P_1) + \frac{d_{1C}}{d_{12}} \delta g(P_2) + \underbrace{\left(\frac{d_{3C}}{d_{34}} - 1\right)}_{-d_{4C}/d_{34}} \delta g(P_3) - \frac{d_{3C}}{d_{34}} \delta g(P_4) \doteq \left(\frac{\partial \delta g}{\partial h}\right) \Delta h \quad (\text{F.4})$$

\Rightarrow

$$\begin{pmatrix} \frac{d_{2C}}{d_{12}} & \frac{d_{1C}}{d_{12}} & -\frac{d_{4C}}{d_{34}} & -\frac{d_{3C}}{d_{34}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta g(P_1) \\ \delta g(P_2) \\ \delta g(P_3) \\ \delta g(P_4) \end{pmatrix} \doteq \left(\frac{\partial \delta g}{\partial h}\right) \Delta h \quad (\text{F.5})$$

Cette équation est maintenant une contrainte pour les équations d'observations. Elle prend en compte seulement les quatres points les plus proches au point de croisement par l'interpolation linéaire. Pour chaque croisement nous aurons une équation de contrainte, et l'ensemble de ces équations s'écrit finalement sous la forme matricielle

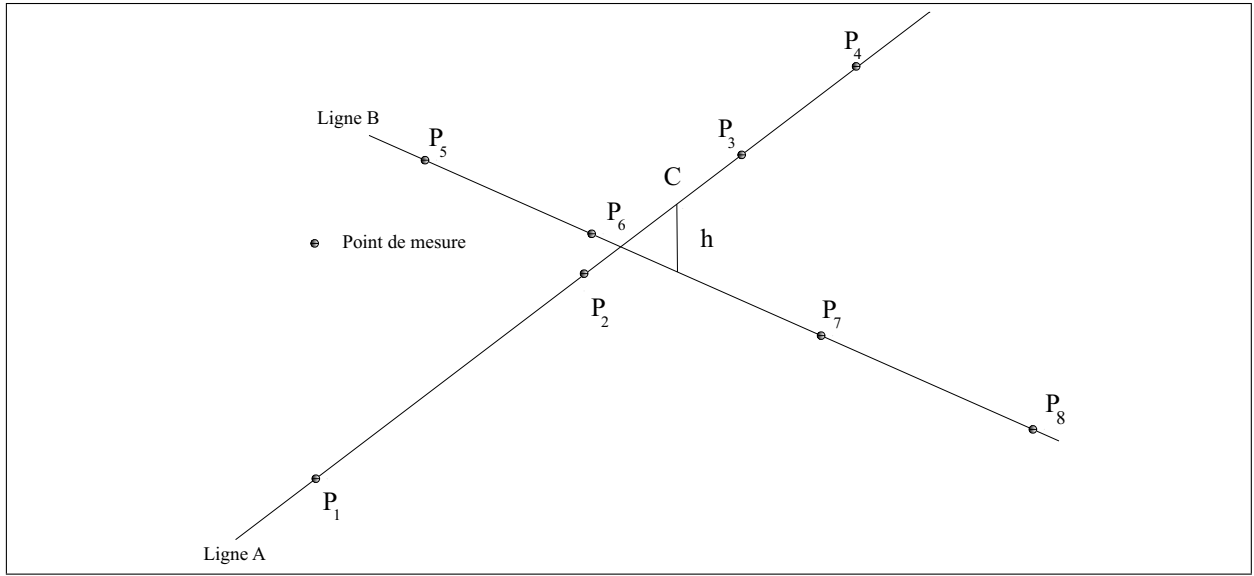
$$\mathbf{B}_1 \mathbf{x} \doteq \mathbf{b} \quad (\text{F.6})$$

avec \mathbf{x} le vecteur contenant toutes les perturbations de gravité inconnues.

F.2 Methode B : Interpolation quadratique

Soit f une certaine fonction comme la perturbation de gravité . Pour la ligne A nous avons :

$$f(C) \doteq f(P_2) + \frac{df}{dt} \Big|_{P_2} (x_C - x_{P_2}) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dt^2} \Big|_{P_2} (x_C - x_{P_2})^2 \quad (\text{F.7})$$

FIG. F.2 – Géométrie du point de croisement C entre deux lignes de vol A et B.

De même :

$$f(C) \doteq f(P_3) + \left. \frac{df}{dt} \right|_{P_3} (x_C - x_{P_3}) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2f}{dt^2} \right|_{P_3} (x_C - x_{P_3})^2 \quad (\text{F.8})$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} f(C) \doteq & \frac{1}{2} \left[f(P_2) + f(P_3) + \left. \frac{df}{dt} \right|_{P_2} (x_C - x_{P_2}) + \left. \frac{df}{dt} \right|_{P_3} (x_C - x_{P_3}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2f}{dt^2} \right|_{P_2} (x_C - x_{P_2})^2 + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2f}{dt^2} \right|_{P_3} (x_C - x_{P_3})^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

On remplace pour les dérivées numériques :

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{P_2} \doteq \frac{f(P_3) - f(P_1)}{x_{P_3} - x_{P_1}} \quad (\text{F.10})$$

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{P_3} \doteq \frac{f(P_4) - f(P_2)}{x_{P_4} - x_{P_2}} \quad (\text{F.11})$$

Pour les dérivées secondes, comme les distances entre les points de mesures ne sont pas égales, nous développerons les relations correspondantes :

$$f(P_3) \doteq f(P_2) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{P_2} (x_{P_3} - x_{P_2}) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{P_2} (x_{P_3} - x_{P_2})^2 \quad (\text{F.12})$$

$$f(P_1) \doteq f(P_2) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{P_2} (x_{P_1} - x_{P_2}) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{P_2} (x_{P_1} - x_{P_2})^2 \quad (\text{F.13})$$

En faisant l'addition de (F.13) et (F.12) et en utilisant (F.10), on obtient après réarrangement, l'expression suivante pour la dérivée seconde de f au point P_2 :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{P_2} &\doteq \frac{2}{[(x_{P_3} - x_{P_2})^2 + (x_{P_1} - x_{P_2})^2]} \\ &\times \left[f(P_3) + f(P_1) - 2f(P_2) - \left(\frac{x_{P_3} + x_{P_1} - 2x_{P_2}}{x_{P_3} - x_{P_1}} \right) (f(P_3) - f(P_1)) \right] \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

L'expression similaire pour le point P_3 est

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{P_3} &\doteq \frac{2}{[(x_{P_4} - x_{P_3})^2 + (x_{P_2} - x_{P_3})^2]} \\ &\times \left[f(P_4) + f(P_2) - 2f(P_3) - \left(\frac{x_{P_4} + x_{P_2} - 2x_{P_3}}{x_{P_4} - x_{P_2}} \right) (f(P_4) - f(P_2)) \right] \end{aligned} \quad (\text{F.15})$$

On remplace (F.10),(F.11),(F.14) et (F.15) en (F.9). L'expression finale pour $f(C)$ avec l'interpolation quadratique est :

$$\begin{aligned} f(C) &\doteq \frac{1}{2} \left\{ \left[-\frac{x_C - x_{P_2}}{x_{P_3} - x_{P_1}} + \frac{(x_C - x_{P_2})^2}{(x_{P_3} - x_{P_2})^2 + (x_{P_1} - x_{P_2})^2} \left[\frac{x_{P_3} + x_{P_1} - 2x_{P_2}}{x_{P_3} - x_{P_1}} + 1 \right] \right] f(P_1) \right. \\ &+ \left[1 - \frac{x_C - x_{P_3}}{x_{P_4} - x_{P_2}} - \frac{2(x_C - x_{P_2})^2}{(x_{P_3} - x_{P_2})^2 + (x_{P_1} - x_{P_2})^2} \right. \\ &+ \left. \frac{(x_C - x_{P_3})^2}{(x_{P_4} - x_{P_3})^2 + (x_{P_2} - x_{P_3})^2} \left[\frac{x_{P_4} + x_{P_2} - 2x_{P_3}}{x_{P_4} - x_{P_2}} + 1 \right] \right] f(P_2) \\ &+ \left[1 + \frac{x_C - x_{P_2}}{x_{P_3} - x_{P_1}} - \frac{2(x_C - x_{P_3})^2}{(x_{P_4} - x_{P_3})^2 + (x_{P_2} - x_{P_3})^2} \right. \\ &+ \left. \frac{(x_C - x_{P_2})^2}{(x_{P_3} - x_{P_2})^2 + (x_{P_1} - x_{P_2})^2} \left[-\frac{x_{P_3} + x_{P_1} - 2x_{P_2}}{x_{P_3} - x_{P_1}} + 1 \right] \right] f(P_3) \\ &+ \left. \left[\frac{x_C - x_{P_3}}{x_{P_4} - x_{P_2}} + \frac{(x_C - x_{P_3})^2}{(x_{P_4} - x_{P_3})^2 + (x_{P_2} - x_{P_3})^2} \left[-\frac{x_{P_4} + x_{P_2} - 2x_{P_3}}{x_{P_4} - x_{P_2}} + 1 \right] \right] f(P_4) \right\} \end{aligned} \quad (\text{F.16})$$

On peut écrire une expression similaire en utilisant les points qui se situent sur la ligne B. Le remplacement des deux expressions pour la ligne A et la ligne B en (F.1) nous donne :

$$\sum_{j=1}^8 \beta_j \delta g(P_j) \doteq 2 \left(\frac{\partial \delta g}{\partial h} \right) \Delta h \quad (\text{F.17})$$

En utilisant la notation de l'Equation (F.4) les coefficients β_1 à β_4 sont :

$$\beta_1 = -\frac{d_{2C}}{d_{31}} + \frac{d_{2C}^2}{d_{32}^2 + d_{21}^2} \left(\frac{2d_{32}}{d_{31}} \right) \quad (\text{F.18})$$

$$\beta_2 = 1 + \frac{d_{3C}}{d_{42}} - \frac{2d_{2C}^2}{d_{32}^2 + d_{21}^2} + \frac{d_{3C}^2}{d_{43}^2 + d_{32}^2} \left(\frac{2d_{43}}{d_{42}} \right) \quad (\text{F.19})$$

$$\beta_3 = 1 + \frac{d_{2C}}{d_{31}} - \frac{2d_{3C}^2}{d_{43}^2 + d_{32}^2} + \frac{d_{2C}^2}{d_{32}^2 + d_{21}^2} \left(\frac{2d_{21}}{d_{31}} \right) \quad (\text{F.20})$$

$$\beta_4 = -\frac{d_{3C}}{d_{42}} + \frac{d_{3C}^2}{d_{43}^2 + d_{32}^2} \left(\frac{2d_{32}}{d_{42}} \right) \quad (\text{F.21})$$

Pour β_5 à β_8 il suffit juste de changer les indices des expression de β_1 à β_4 de la façon suivante : l'indice k est remplacé par l'indice $k + 4$, par exemple :

$$\beta_5 = -\left(-\frac{d_{6C}}{d_{75}} + \frac{d_{6C}^2}{d_{76}^2 + d_{65}^2} \left(\frac{2d_{76}}{d_{75}} \right) \right) \quad (\text{F.22})$$

Encore une fois (F.17) est une contrainte pour les équations d'observation qui a été obtenue par interpolation quadratique. Cette contrainte est valable pour un seul point de croisement. Pour l'ensembles de ces points la forme matricielle de cette contrainte est

$$\mathbf{B}_2 \mathbf{x} \doteq \mathbf{b} \quad (\text{F.23})$$

Les vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{b} ici sont les mêmes vecteurs qu'en Equation (F.6).

Bibliographie

- Abbasi M (1999) Comparison of Fourier, least squares and wavelet spectral analysis methods, tested on Persian gulf tidal data. MSc thesis in Geodesy, K N Toosi University of technology, Tehran, Iran
- Abdelmoula F (2001) New concepts for airborne gravity measurement. *Aerosp. Sci. Technol.* Vol 5, pp. 413-424
- Abuhadrous I (2005) Système embarqué temps réel de localisation et de modélisation 3D par fusion multi-capteur. Thèse pour obtenir le grade de Docteur de l'Ecole des mines de Paris, France
- Aliod D, E Mann et M Holliday (2003) LaCoste & Romberg Air-Sea Gravity Meter Vibration Tests. [http ://www.lacosteromberg.com/techdocsfr.htm](http://www.lacosteromberg.com/techdocsfr.htm)
- Austen G, EW Grafarend et T Reubelt (2001) Analysis of the earth's gravitational field from semi-continuous ephemeris of a low Earth orbiting GPS-tracked satellite of type CHAMP, GRACE or GOCE. *Proceedings of IAG2001 scientific assembly (2001-Budapest, Hungary)*, vol 125, Ádám and Schwarz (eds.) *Vistas for Geodesy in the New Millennium*, Springer-Verlag (2002)
- Bayoud FA (2001) Some investigations on local geoid determination from airborne gravity data. MSc thesis, Department of Geomatics engineering, The University of Calgary, Page. 17
- Barriot JP et G Balmino (1992) Estimation of local planetary gravity fields using line of sight gravity data and an integral operator. *ICARUS* 99, pp. 202-224
- Bell RE, VA Childers et RA Arko (1999) Airborne gravity and precise positioning for geologic applications. *Journal of Geophysical Research*, Vol. 104, No. B7, Pages 15281-15292

- Boedecker G, F Leismüller, T Sohnholtz, J Cuno et KH Neumayer (1994) Accelerometer/GPS integration for strapdown airborne gravimetry : first test results. Proceedings of IAG symposium, vol 113, Springer 1994
- Bosq D et JP Lecoutre (1992) Analyse et prévision des séries chronologiques. Masson, Paris
- Bouteloup D (2003) Présentation du système GPS. Cours de Géodésie, Ecole Nationale des sciences Géographiques (ENSG), Institut Geographique National (IGN), Paris, France
- Brozena JM (1992) Airborne gravity. CRC Handbook of Geophysical Exploration at sea, 2nd Edition, Hard Minerals : CRC press
- Bruton AM (2000) Improving the accuracy and resolution of SINS/DGPS airborne gravimetry. PhD thesis, University of Calgary, Calgary, Canada
- Bruton AM, CL Glennie et KP Schwarz (1999) Differentiation for high-precision GPS velocity and acceleration determination. GPS solutions, Vol. 2, No. 4, pp. 7-12
- Chatfield C (1995) The analysis of time series, an introduction. Fifth edition, Chapman&Hall/CRC
- Childers VA, RE Bell et JM Brozena (1999) Airborne gravimetry : An investigation of filtering. Geophysics, vol 64, No 1, pp 61-69
- Ciminale M et M Loddo (1989) A computer program to perform the upward continuation of potential field data between arbitrary surfaces. Computers & Geosciences, 15, no. 6, 889-903
- Cocard M (1995) High precision GPS processing in kinematic mode. PhD thesis, Schweizerischen Geodätischen Kommission, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, Volume 52, Zürich, Switzerland
- Crocetto N, M Gatti et P Russo (2000) Simplified formulae for the BIQUÉ estimation of variance components in disjunctive observation groups. Journal of Geodesy, 74 : 447-457
- Ditmar P et AA van Eck van der Sluijs (2004) A technique for modelling the earth's gravity field on the basis of satellite accelerations. Journal of Geodesy, 78 : 12-33
- Dwaik FY (1998) INS, GPS and photogrammetry integration for vector gravimetry estimation. Report No. 456, Geodetic Science and Surveying Department, The Ohio State University, Columbus, Ohio
- Esan O (2000) Spectral analysis of gravity field data and errors in view of sub-decimeter geoid determination in Canada. UCGE reports number 20137, Department of Geomatics Engineering, University of Calgary, Canada

- Flury J (2006) Short-wavelength spectral properties of the gravity field from a range of regional data sets. *Journal of Geodesy*, 79 : 624-640
- Gabell A, Tuckett H et Olson D (2004) The GT-1A mobile gravimeter. R.J.L Lane, Editor, Airborne gravity 2004-Abstracts from ASEG-PESA Airborne gravity 2004 Workshop : Geoscience Australia Record 2004/18, pp. 55-61
- Giremus A (2005) Apports des techniques de filtrage non linéaire pour la navigation avec les systèmes de navigation inertiels et le GPS. Thèse pour obtenir le grade de Docteur de l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, Toulouse, France
- Glennie CL, KP Schwarz, AM Bruton, R Forsberg, AV Olesen et K Keller (2000) A comparison of stable platform and strapdown airborne gravity. *Journal of Geodesy*, 74 : 383-389
- Hofmann-Wellenhof B, Lichtenegger H et Collins J (2001) Global positioning system : Theory and practice. 5th revised edition, Springer-Verlag
- Hofmann-Wellenhof B et H Moritz (2005) Physical geodesy. Springer-Verlag
- Hugentobler U, S Schaer et P Fridez (2001) Documentation of the Bernese GPS Software Version 4.2. Astronomical Institute, University of Berne, pp. 161-163
- Isaacson E et HB Keller (1994) Analysis of numerical methods. Dover publications, Inc. New York
- Kennedy SL (2003) Precise acceleration determination from carrier-phase measurements. *Navigation : Journal of Institute of Navigation*, Vol. 50, No. 1
- Klingelé EE, M Cocard, M Holliday et HG Kahle (1996) The airborne gravimetric survey of Switzerland. Rapport GEOPHYSIQUE No. 31, Publié par la commission Suisse de Géophysique
- Knudsen P (1987) Estimation and modelling of the local empirical covariance function using gravity and satellite altimeter data. *Bulletin Géodésique*, 61, pp. 145-160
- Kusche J et R Klees (2001) On the regularization problem in gravity field determination from satellite gradiometric data. Proceedings of IAG2001 scientific assembly (2001-Budapest, Hungary), vol 125, Ádám and Schwarz (eds.) Vistas for Geodesy in the New Millennium, Springer-Verlag (2002)
- Kwon JH (2000) Airborne vector gravimetry using GPS/INS. Report No 453, Geodetic Science and Surveying Department, The Ohio State University, Columbus, Ohio
- LaCoste LJB (1967) Measurement of gravity at sea and in the air. *Reviews of Geophysics*, vol 5, No 4

- LaCoste LJB, N Clarkson et G Hamilton (1967) LaCoste and Romberg stabilized platform shipboard gravity meter. *Geophysics*, Vol. 32, No. 1, pp. 99-109
- LaCoste&Romberg Society (1998) Instruction manual of the LaCoste & Romberg Model "S" Air/Sea Dynamic gravimeter. Sur : www.LaCosteRomberg.com
- Lane R (2004) Integrating ground and airborne data into regional gravity compilations. R.J.L Lane, Editor, *Airborne gravity 2004- Abstracts from ASEG-PESA Airborne gravity 2004 Workshop : Geoscience Australia Record 2004/18*, pp. 81-97
- Leick A (1990) *Satellite surveying*. John Wiley & sons
- Leick A (2004) *GPS satellite surveying*. Third edition, John Wiley & sons
- Marchenko AN, F Barthelmes, U Meyer et P Schwintzer (2002) Efficient Regional Geoid Computations from Airborne and Surface Gravimetry Data - A Case Study. *Proceedings of IAG2001 scientific assembly (2001-Budapest, Hungary)*, vol 125, Ádám and Schwarz (eds.) *Vistas for Geodesy in the New Millennium*, Springer-Verlag, pp. 223-228
- Martinec (1998) *Boundary-value problems for gravimetric determination of a precise geoid*. Springer-Verlag
- Mathews JH et KK Fink (2004) *Numerical methods using Matlab*. 4th Edition, pp. 323-342. Prentice-Hall Inc., Upper Saddle River, New Jersey, USA
- Melachroinos S (2004) *Le développement d'un système de gravimétrie mobile*. Mémoire de DEA, Institut Géographique National, Laboratoire de Recherche en Géodésie (LAREG)
- Mittal PK (1984) Algorithm for error adjustment of potential field data along a survey network. *Geophysics*, Vol. 49, No. 4, pp. 467-469
- Morozov VA (1984) *Methods for solving incorrectly posed problems*. pp. 226-228. Springer-Verlag, New York/Berlin
- Moritz H (1980) *Advanced physical geodesy*. Herbert Wichmann Verlag Karlsruhe
- Nerem RS, C Jekeli et WM Kaula (1995) Gravity field determination and characteristics : Retrospective and prospective. *Journal of Geophysical Research*, Vol. 100, No B8, Pages 15053-15074
- Olesen AV (2002) *Improved airborne scalar gravimetry for regional gravity field mapping and geoid determination*. PhD Thesis, National Survey and Cadastre - Denmark (KMS)
- Olesen AV, R Forsberg et K Keller (2002) Error sources in airborne gravimetry employing a spring-type gravimeter. *Proceedings of IAG2001 scientific assembly (2001-Budapest, Hungary)*, vol 125, Ádám and Schwarz (eds.) *Vistas for Geodesy in the New Millennium*, Springer-Verlag (2002)

- Papoulis A (1965) Probability, random variables and stochastic processes. p. 340, McGraw-Hill, Inc.
- Reigber C, R Schmidt, F Flechtner, R König, U Meyer, K H Neumayer, P Schwintzer et SY Zhu (2005) An earth gravity field model complete to degree and order 150 from GRACE : EIGEN-GRACE02S. Journal of Geodynamics, Vol. 39, No. 1, Pages 1-10
- Rothacher M et L Mervart (1996) Bernese GPS Software Version 4.0 : Documentation published by the Astronomical Insitute of the University of Berne
- Salychev O (2003) Applied Inertial Navigation : problems and solutions. Bauman MSTU Press, Moscow
- Schwarz KP, M Kern et SM Nassar (2002) Estimating the gravity disturbance vector from airborne gravimetry. Proceedings of IAG2001 scientific assembly (2001-Budapest, Hungary), vol 125, Ádám and Schwarz (eds.) Vistas for Geodesy in the New Millennium, Springer-Verlag (2002)
- Schwarz KP et M Wei (1994) Some unsolved problems in airborne gravimetry. Sünkel H Marson I (eds) Springer, Berlin, Proc. IAG Symp 113 Gravity and Geoid. Springer, Berlin, pp 131-150
- Seeber G (1993) Satellite Geodesy : Foundations, methods and applications. Walter de Gruyter
- Serpas JG et C Jekeli (2005) Local geoid determination from airborne vector gravimetry. Journal of Geodesy, 78 : 577-587
- Shi J(1994) High accuracy airborne differential GPS positioning using a multi-receiver configuration. University of Calgary, UCGE reports, Number 20061
- Sillard P (2001) Estimation par moindres carrés. Hermès Science Publications, Paris
- Tapley BD, S Bettadpur, JC Ries, PF Thompson et Watkins M (2004) GRACE measurements of mass variability in the earth system. Science, Vol. 305, Issue 5683, 503-505
- Teunissen PJG et A Kleusberg(1996) GPS for geodesy, Lecture notes in Earth Sciences. 1th edition, Springer-Verlag
- Teunissen PJG (2001) Dynamic data processing. Delft University Press, Delft, The Netherlands
- Tiberius CCJM (1998) Recursive data processing for kinematic GPS surveying. NCG KNAW Netherlands Geodetic Commission, Publications for Geodesy, Delft, The Netherlands
- Tikhonov AN et VA Arsenin (1977) Solutions of ill-posed problems. Winston & Sons, Washington

- Torge W (1989) Gravimetry. Walter de Gruyter. Berlin, New York
- Valliant HD (1991) The LaCoste & Romberg Air/Sea gravity meter : An overview. CRC Handbook of Geophysical Exploration at sea, 2nd Edition, Hydrocarbons : CRC press, pp. 141-176
- Vaníček P et E Krakiwsky (1986) Geodesy : the concepts. Elsevier Science Publishers
- Vaníček P, W Sun, P Ong, Z Martinec, M Najafi, P Vajda et B ter Horst (1996) Downward continuation of Helmert's gravity. Journal of Geodesy, 71 : 21-34
- Vaseghi SV (2000) Advanced digital signal processing and noise reduction. Second edition, John Wiley & Sons, LTD
- Verdun J (2000) La gravimétrie aéroportée en région montagneuse. Exemple de levé franco-suisse sur les Alpes Occidentales. Thèse pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Montpellier II, France
- Verdun J, R Bayer, EE Klingelé, M Cocard, A Geiger et ME Halliday (2002) Airborne gravity measurements over mountainous areas by using a LaCoste & Romberg air-sea gravity meter. Geophysics, Vol. 67, No. 3, pp. 807-816
- Verdun J, EE Klingelé, R Bayer, M Cocard, A Geiger et HG Kahle(2003) The alpine Swiss-French airborne gravity survey. Geophysical Journal International, 152, pp. 8-19
- Verdun J et EE Klingelé (2005) Airborne gravimetry using a strapped-down LaCoste and Romberg air/sea gravity meter system : a feasibility study. Geophysical Prospecting, 53, 91-101
- Wei M et KP Schwarz (1998) Flight test results from a strapdown airborne gravity system. Journal of Geodesy, 72 : 323-332
- Weigelt E et W Jokat (2001) Peculiarities of roughness and thickness of oceanic crust in the Eurasian Basin, Arctic Ocean. Geophysical Journal International, 145, pp. 505-516
- Yu ZC (1996) A universal formula of maximum likelihood estimation of variance-covariance components. Journal of Geodesy, 70 : 233-240
- Zwillinger D (1998) Handbook of differential equations. Third edition, Academic press

Madjid ABBASI

Treatment of the gravimetric data acquired during airborne surveys

Discipline : Geodesy

PhD defended the July 10, 2006 at Observatoire Midi-Pyrénées

Thesis director :

Jean-Pierre Barriot (CNES, Toulouse)

Abstract :

The traditional airborne gravimetric data processing method, based on frequency domain filtering, does not take into account the statistical properties of measurements, such as correlations, and does not allow an easy estimation of the errors on the gravity. We therefore developed a new reduction method based on the transformation of the differential equation of the gravimeter into an integral equation. This equation is then solved through a regularized inversion in the least squares sense. We successfully applied this new method to model the medium wavelengths of the gravity field over the South-West part of the Alps with an intrinsic precision of 3 mGal. The data used were gathered with a "Lacoste & Romberg Air/Sea" gravimeter during an airborne gravimetric survey carried out in 1998 in the framework of the national research program "GéoFrance 3D".

Keywords :

airborne gravimetry, gravimeter, transfer function, integral equation, regularization,
gravity disturbance, Occidental Alps

Laboratoire de Dynamique Terrestre et Planétaire, UMR 5562,
Observatoire Midi-Pyrénées, 14, avenue E. Belin, 31400 Toulouse, France

Madjid ABBASI

Etude du traitement de données gravimétriques acquises lors de levés aériens

Discipline : Géodésie

Thèse soutenue le 10 juillet 2006 à l'Observatoire Midi-Pyrénées

Directeur de thèse :

Jean-Pierre Barriot (CNES, Toulouse)

Résumé :

La méthode classique de traitement des données aérogravimétriques par filtrage fréquentiel ne prend pas en compte les propriétés statistiques des mesures, telles les corrélations, et ne permet pas une estimation aisée des erreurs sur le champ de gravité. Nous avons donc développé une nouvelle méthode de réduction par inversion régularisée au sens des moindres carrés, basée sur la transformation de l'équation différentielle du gravimètre en équation intégrale, qui permet cette estimation. Nous avons appliqué cette nouvelle méthode avec succès à la modélisation du champ de gravité dans le domaine des moyennes longueurs d'ondes sur la partie Sud-Ouest des Alpes avec une précision interne de 3 mGal. Les données utilisées ont été acquises avec un gravimètre " LaCoste & Romberg modèle Air/Sea " lors d'un levé gravimétrique aéroporté réalisé en 1998 dans le cadre du programme national de recherche " GéoFrance 3D ".

Mots-clés :

gravimétrie aéroportée, gravimètre, fonction de transfert, équation intégrale, régularisation, perturbation de gravité, Alpes Occidentales

Laboratoire de Dynamique Terrestre et Planétaire, UMR 5562,
Observatoire Midi-Pyrénées, 14, avenue E. Belin, 31400 Toulouse, France